תאריך: 10.3.2014

מרצה: אריאל ידין

שם הקורס: תורת המידה

מספר הקורס: 201.1.0081

שנה: 2014 סמסטר: א מועד: ג

משך הבחינה: 3 שעות

אין חומר עזר

בהצלחה!

חלק א: שאלת חובה: הגדרות ומשפטים

חלק זה שווה 25 נקודות

(א) | 9 נקי |

נסחו את משפט Fubini-Tonelli

(ב) | 8 נקי |

נתונה מידה חיצונית μ^*, הגדירו קבוצה מדידה-μ^*.

(ג) | 8 נקי |

הגדירו σ-אלגברה.

חלק ב: הוראות:

בחלק זה עליכם לבחור 3 שאלות מתוך 4 (שלוש בלבד)

כתבו בתחילת המחברת באופן ברור על אלו שאלות עניתם

כתבו באופן ברור את תשובותיכן, ונמקו כל תשובה באופן מתמטי

שאלה 1: נתון מרחב מידה $(X,\mathcal{F},\mu)$. כמו כן, נתונות סדרה של פונקציות מדידות $f_n : X \to \mathbf{C}$, ופונקציה מדידה $f : X \to \mathbf{C}$. הראו את הגרירות הבאות:

(א) | 6 נק׳ |

$(f_n)_n$ מתכנסת ב-L^∞ ל-f אם ורק אם קיימת קבוצה מדידה A כך ש-$\mu(A^c) = 0$ וכן $(f_n\mathbf{1}_A)_n$ מתכנסת במידה שווה ל-$f\mathbf{1}_A$.

(ב) | 6 נק׳ |

אם $(f_n)_n$ מתכנסת כמעט-במידה-שווה ל-f, אז $(f_n)_n$ מתכנסת כמעת-בכל-מקום ל-f.

(ג) | 6 נק׳ |

אם $(f_n)_n$ מתכנסת ל-f כמעט-במידה-שווה, אז $(f_n)_n$ מתכנסת ל-f במידה.

(ד) | 7 נק׳ |

אם $(f_n)_n$ מתכנסת ל-f ב-L^p, אז $(f_n)_n$ מתכנסת ל-f במידה.

שאלה 2: | 25 נקי |

נתון מרחב מדיד $(X,\mathcal{F})$. נסמן ב-L^+ את כל הפונקציות המוכללות האי-שליליות מדידות על המרחב; כלומר,

$$L^+ = \{f : X \to [0,\infty] \mid f \text{ מדידה } \}.$$

נתון פונקציונל $I : L^+ \to [0,\infty]$ עם התכונות הבאות:

- הומוגניות: לכל $f \in L^+, c \in [0,\infty]$ מתקיים $I(cf) = cI(f)$.
- חיבוריות: לכל $f,g \in L^+$ מתקיים $I(f+g) = I(f) + I(g)$.
- התכנסות מונוטונית: אם $0 \le f_1 \le f_2 \le \cdots$ סדרה מונוטונית לא-יורדת של פונקציות ב-L^+, אז מתקיים:

$$I(\lim_{n\to\infty} f_n) = \lim_{n\to\infty} I(f_n).$$

הראו שקיימת מידה μ על $(X,\mathcal{F})$ כך שלכל $f \in L^+$ מתקיים $I(f) = \int f d\mu$.

יותר מזה, הראו ש-μ נתונה על ידי הנוסחה: $\mu(A) = I(1_A)$ לכל $A \in \mathcal{F}$.

שאלה 3: נניח ש-$\mathcal{A}$ היא אלגברה, וש-μ_0 קדם-מידה על $\mathcal{A}$.

נסמן ב-μ^* את המידה החיצונית המושרה מ-μ_0.

נסמן על ידי Σ את אוסף כל האיחודים בני-מניה של קבוצות מתוך $\mathcal{A}$:

$$\Sigma := \left\{ \bigcup_n A_n \ : \ \forall\ n\ ,\ A_n \in \mathcal{A} \right\}.$$

נסמן על ידי Δ את כל החיתוכים בני-מניה של קבוצות מתוך Σ:

$$\Delta := \left\{ \bigcap_n S_n \ : \ \forall\ n\ ,\ S_n \in \Sigma \right\}.$$

(א) | 8 נקי |

הראו שלכל קבוצה $E \subset X$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיימת קבוצה $S \in \Sigma$ כך ש-

$$\mu^*(S) \le \mu^*(E) + \varepsilon.$$

(ב) | 9 נק׳ |

הראו שאם $\mu^*(E) < \infty$ אז E מדידה-μ^* אם ורק אם קיימת קבוצה $D \in \Delta$ כך ש-$E \subset D$ וכן $\mu^*(D \setminus E) = 0$.

(ג) | 8 נק׳ |

הראו שאם μ_0 היא σ-סופית אז סעיף (ב) נכון גם ללא ההנחה ש-$\mu^*(E) < \infty$.

שאלה 4: | 25 נק׳ |

נניח ש-$E \subset \mathbf{R}$ מדידה לבג. נניח עוד של-E מידת לבג חיובית.

הראו שלכל $\varepsilon > 0$ קיים קטע פתוח I כך שמתקיים

$$\lambda(E \cap I) \geq (1 - \varepsilon)\lambda(E),$$

כאשר λ מידת לבג על $\mathbf{R}$.