הסתברות – מבחן לדוגמא

1. (א) נתונים מאורעות A,B כך ש- $P[A\cup B]=\frac{3}{4}$ $P[A]=\frac{1}{2}$ $P[B]=\frac{1}{3}$

חשבו את את ההסתברות של B בהנתן A.

(ב) נתונים מאורעות A,B,C כך ש- $P[A\cup B\cup C]=\frac{1}{2}$, $P[A\cup B]=\frac{1}{3}$,

$P[A\cup C]=\frac{1}{4}$, $P[A]=\frac{1}{12}$

הראו ש- $P[C\cap B\cap A^c]=0$

(ג) הוכיחו שלכל שני מאורעות A,B מתקיים:

A ו-B בלתי תלויים אם ורק אם $P[A\cup B]=P[A]\cdot P[B^c]+P[B]$

2. נתונות שתי סדרות של מ"מ, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}},(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, כך שכל המשתנים המקריים בלתי תלויים.

נתון שלכל n, $X_n\sim Exp(\lambda)$ $Y_n\sim Exp(\lambda)$

(א) מ"מ Z נקרא <u>סימטרי</u> אם לכל t מתקיים: $F_Z(t)=F_{-Z}(t)$

הראו שאם Z מ"מ סימטרי ורציף לחלוטין עם תוחלת סופית אז $E[Z]=0$

(ב) חשבו את התוחלת והשונות של X_n-Y_n

(ג) הראו שמתקיים $\lim_{N\to\infty} P\left[\sum_{k=1}^{N} X_k\geq\sum_{k=1}^{N} Y_k\right]=\frac{1}{2}$

3. נתונים שני מ"מ בלתי תלויים X ו-Y. נתון ש- $Y\sim Geo(q)$, $X\sim Geo(p)$

(א) כתבו טווח אפשרי למ"מ X-Y

(ב) הראו שהצפיפות של X-Y היא

$$f_{X-Y}(z)=\begin{cases}\frac{pq}{p+q-pq}\cdot(1-p)^z & z\geq 0\\ \frac{pq}{p+q-pq}\cdot(1-q)^{-z} & z\leq -1\end{cases}$$

4. נתון מ"מ X המקיים $P[X \le m]=1$ עבור $m>0$ כלשהו.

(א) הגדירו מ"מ Y כך ש- $Y \le m$ וכן $P[X=Y]=1$

(ב) הראו שלכל $\lambda \in \mathbb{R}$ מתקיים $P[X \le \lambda]=P[Y \le \lambda]$

(ג) הראו שמתקיים $E[X]=E[Y]$

(ד) הוכיחו: לכל $\lambda < m$ מתקיים $P[X \le \lambda] \le \frac{m-E[X]}{m-\lambda}$

5. נתונים שני מ"מ X ו-Y, כך שלשניהם יש מומנט שני, וכן $Var[X]=Var[Y]$

(א) הראו שהמ"מ X-Y ו-X+Y הם בלתי מתואמים.

(ב) תנו דוגמא למ"מ X,Y כך ש- $Var[X]=Var[Y]=1$ $E[X]=E[Y]=0$

ובכל זאת X-Y ו- X+Y <u>אינם</u> בלתי תלויים