תאריך: 1.2.2017

מרצה: אריאל ידין

שם הקורס: הסתברות

מספר הקורס: 201.1.8001

שנה: תשעז סמסטר: א, מועד: א

משך הבחינה: 3 שעות

אין חומר עזר (מחשבון פשוט מותר)

הוראות:

במבחן זה סה"כ 115 נקודות, כאשר הציון המקסימלי הוא 100. מותר לענות על כמה סעיפים שרוצים.

כתבו באופן ברור בתחילת המחברת על אילו שאלות עניתן. שאלה שלא ברור שעניתן עליה - לא תבדק.

כתבו באופן ברור את תשובותיכן, ונמקו כל תשובה באופן מתמטי

בהצלחה!

שאלה 1: **(א)** | 10 נקי׳ |

נניח ש-$a_1, \ldots, a_n$ מספרים ממשיים חיוביים כלשהם.

נניח ש-Z מתפלג אחיד על $\{1, 2, \ldots, n\}$.

נגדיר מ״מ W על ידי

$$W = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{\{Z=k\}}.$$

חשבו את התוחלת של W ושל W^2.

השתמשו בחישוב כדי להוכיח

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \geq \frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)^2.$$

(ב) | 10 נקי׳ |

נתונים שני מ״מ בדידים בלתי-תלויים X, Y

נתון שלשניהם אותו טווח ואתה צפיפות בדידה

חשבו את $\mathbf{P}[X = Y]$ כאשר נתון ש-X מתפלג אחיד על $\{1, 2, \ldots, n\}$, כלומר

$$\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\} \qquad f_X(k) = \frac{1}{n}$$

(ג) | 10 נקי׳ |

הוכיחו ש-$\mathbf{P}[X = Y]$ הוא מינימלי כאשר X מתפלג אחיד על הטווח.

כלומר, הראו שלכל X, Y בדידים בלתי-תלויים עם טווח $\{1, 2, \ldots, n\}$ וצפיפות בדידה $f_X = f_Y$ מתקיים ש-$\mathbf{P}[X = Y]$ הוא לפחות מה שקיבלתם בסעיף (ב).

שאלה 2: עבור מ״מ כללי X נגדיר פונקציה

$$T_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad T_X(r) := \mathbf{P}[X \geq r].$$

הוכיחו שלפונקציה T_X יש את התכונות הבאות:

(א) | 6 נקי׳ |

T_X רציפה משמאל

(ב) | 6 נקי׳ |

T_X מונוטונית לא עולה

(ג) | 6 נקי׳ |

$T_X(\infty) = 0$ וגם $T_X(-\infty) = 1$.

(ד) | 6 נקי׳ |

לכל $a < b$ ממשיים, מתקיים

$$\mathbf{P}[a \leq X < b] = T_X(a) - T_X(b)$$

(ה) | 6 נקי׳ |

לכל a ממשי, מתקיים

$$\mathbf{P}[X = a] = T_X(a) - \lim_{n \to \infty} T_X(a + 2^{-n})$$

שאלה 3: נתון $X \sim U[0,1]$ ונתון מספר שלם $n > 1$.

נגדיר

$$Y = \begin{cases} X^{-1/n} & X \neq 0 \text{ כאשר} \\ 0 & X = 0 \text{ כאשר} \end{cases}$$

(א) | 10 נקי |

הראו ש-Y מ״מ רציף לחלוטין וחשבו את הצפיפות של Y (n הוא פרמטר)

(ב) | 10 נקי |

חשבו את התוחלת של Y (כביטוי ב-n)

(ג) | 10 נקי |

הראו ש- $\mathbf{E}[Y^n] = \infty$

שאלה 4: נתונים שני מ״מ $X \sim \text{Ber}(p)$ ו-$Y \sim \text{Ber}(q)$ על אותו מרחב הסתברות.

(א) | 13 נקי |

הוכיחו ש-X, Y בלתי-תלויים אם ורק אם X, Y בלתי-מתואמים.

(ב) | 12 נקי |

תנו דוגמא לשלושה מ״מ X, Y, Z כך ש-

$$X \sim \text{Ber}(p) \qquad Y \sim \text{Ber}(q) \qquad Z \sim \text{Ber}(r)$$

עבור $0 < p, q, r < 1$ וגם

$$\mathbf{E}[XYZ] = \mathbf{E}[X] \cdot \mathbf{E}[Y] \cdot \mathbf{E}[Z]$$

אבל השלשה X, Y, Z **אינם** בלתי-תלויים.

נוסחאות

שם	צפיפות	התפלגות	טווח	תוחלת	שונות
Ber(p)	$f_X(k) = \begin{cases} p & k=1 \\ 1-p & k=0 \end{cases}$	$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1-p & 0 \le t < 1 \\ 1 & t \ge 1 \end{cases}$	$\{0,1\}$	p	$p(1-p)$
Bin(n,p)	$f_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$		$\{0,1,\ldots,n\}$	np	$np(1-p)$
Geo(p)	$f_X(k) = p(1-p)^{k-1}$	$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t<1 \\ 1-(1-p)^{\lfloor t \rfloor} & t \ge 1 \end{cases}$	$\{1,2,\ldots,\}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poi(λ)	$f_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$		$\{0,1,\ldots,\}$	λ	λ
$U[a,b]$	$f_X(s) = \begin{cases} 0 & s \notin [a,b] \\ \frac{1}{b-a} & s \in [a,b] \end{cases}$	$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t<a \\ \frac{t-a}{b-a} & a \le t < b \\ 1 & t \ge b \end{cases}$		$\frac{b+a}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exp(λ)	$f_X(s) = \begin{cases} 0 & s<0 \\ \lambda e^{-\lambda s} & s \ge 0 \end{cases}$	$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1-e^{-\lambda t} & t \ge 0 \end{cases}$		$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$N(\mu,\sigma)$	$f_X(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$F_X(t) = \Phi(t)$		μ	σ^2