תאריך: 15.02.2013

מרצה: אריאל ידין

שם הקורס: הסתברות

מספר הקורס: 201.1.8001

שנה: 2013 סמסטר: א מועד: א

משך הבחינה: 3 שעות

אין חומר עזר

הוראות:

במבחן סה״כ 115 נקודות. מותר לענות על כמה סעיפים שרוצים.

כתבו באופן ברור בתחילת המחברת על אילו שאלות עניתן. שאלה שלא ברור שעניתן עליה - לא תבדק.

כתבו באופן ברור את תשובותיכן, ונמקו כל תשובה באופן מתמטי

בהצלחה!

שאלה 1: **(א)** | 14 נק׳ |

נתונים שני מ״מ $X \sim \mathrm{Ber}(p), Y \sim \mathrm{Ber}(q)$ על אותו מרחב הסתברות. הוכיחו ש-X, Y בלתי תלויים אם ורק אם X, Y בלתי מתואמים.

(ב) | 14 נק׳ |

תנו דוגמא למ״מ תלת-ממדי (X, Y, Z) עם התכונות הבאות:

* כל אחד מהמ״מ X, Y, Z מתפלג Bernoulli
* $\mathbf{E}[XYZ] = \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y]\mathbf{E}[Z]$
* המ״מ X, Y, Z לא בלתי תלויים

שאלה 2: עבור פרמטרים $n \geq 1$ שלם ו-$\lambda > 0$ ממשי נגדיר התפלגות: $X \sim \Gamma(n, \lambda)$

אם X מ״מ רציף לחלוטין בעל צפיפות

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} & \text{עבור } t > 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases},$$

(א) | 7 נקי׳ |

הראו שאם $X \sim \Gamma(1, \lambda)$ אז $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

(ב) | 12 נקי׳ |

הראו שאם $X \sim \Gamma(n, \lambda)$ וכן $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$,

כך ש-X, Y בלתי תלויים, אז $X + Y \sim \Gamma(n+1, \lambda)$

(ג) | 5 נקי׳ |

הסיקו שעבור $Y_1, \dots, Y_n$ בלתי תלויים עם התפלגות מעריכית λ,

הסכום $Y_1 + \cdots + Y_n$ מתפלג $\Gamma(n, \lambda)$.

(ד) | 5 נקי׳ |

עבור $X \sim \Gamma(n, \lambda)$ חשבו את $\mathbf{E}[X]$ ואת $\mathrm{Var}[X]$.

שאלה 3: נתונים $p, q \in (1, \infty)$ כך ש-$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(א) | 10 נקי׳ |

נניח ש-a, b מספרים ממשיים חיוביים כלשהם

נגדיר מ״מ Z כך

$$\mathbf{P}[Z = a^p] = \frac{1}{p} = 1 - \mathbf{P}[Z = b^q] = 1 - \frac{1}{q}.$$

הראו ש-$\mathbf{E}[-\ln Z] \leq -\ln \mathbf{E}[Z]$.

הסיקו שלכל שני מספרים חיוביים a, b מתקיים $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

(ב) | 10 נקי׳ |

השתמשו ב-(א) כדי להראות שאם X, Y מ״מ עם $\mathbf{E}[|X|^p] = \mathbf{E}[|Y|^q] = 1$ אז

מתקיים $\mathbf{E}[|XY|] \leq 1$

(ג) | 9 נקי׳ |

כעת הראו שלכל שני מ״מ X, Y מתקיים

$$\mathbf{E}[|XY|] \leq (\mathbf{E}[|X|^p])^{1/p} \cdot (\mathbf{E}[|Y|^q])^{1/q}.$$

(הקפידו להתיחס לכל האפשרויות.)

שאלה 4: נתונים מ״מ בלתי תלויים $X_1, X_2, \ldots,$

כך שלכל n, $X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$

נסמן: $S_n = X_1 + \cdots + X_n$

(א) | 7 נקי׳ |

לכל α ממשי חשבו את $\mathbf{E}[e^{\alpha X_1}]$

(ב) | 5 נקי׳ |

לכל α ממשי מהו $\mathbf{E}[e^{\alpha S_n}]$?

(ג) | 10 נקי׳ |

השתמשו באי שוויון Markov יחד עם הסעיפים הקודמים כדי להראות שלכל

$\alpha, \beta > 0$

$$\mathbf{P}\Big[S_n \leq \beta\Big] \leq \Big(\frac{\lambda+\alpha}{\lambda}\Big)^{-n} \cdot e^{\alpha\beta}.$$

(ד) | 7 נקי׳ |

השתמשו באי שוויון $e^{\varepsilon} \leq 1 + \varepsilon + \varepsilon^2$ וכן

השתמשו ב-α, β מתאימים כדי להסיק שלכל $0 < \varepsilon < 1$,

$$\mathbf{P}\Big[S_n \leq \mathbf{E}[S_n] \cdot (1-\varepsilon)\Big] \leq (1-\varepsilon^3)^n.$$