תאריך: 22.1.2014

מרצה: אריאל ידין

שם הקורס: הסתברות

מספר הקורס: 201.1.8001

שנה: 2014 סמסטר: א מועד: א

משך הבחינה: 3 שעות

אין חומר עזר

בהצלחה!

חלק א: שאלת חובה: הגדרות ומשפטים

חלק זה שווה 15 נקודות

(א) | 5 נק׳ |

צטטו את אי-שוויון Chebyshev

(ב) | 5 נק׳ |

הגדירו אוסף מ״מ בלתי-תלויים

(ג) | 5 נק׳ |

צטטו את נוסחת ההסתברות השלימה

חלק ב: הוראות:

בחלק זה סה״כ 100 נקודות, כאשר הציון המקסימלי עבור חלק זה הוא 85. מותר לענות על כמה סעיפים שרוצים.

כתבו באופן ברור בתחילת המחברת על אילו שאלות עניתן. שאלה שלא ברור שעניתן עליה - לא תבדק.

כתבו באופן ברור את תשובותיכן, ונמקו כל תשובה באופן מתמטי

שאלה 1: אחים של חיילים שולחים להם חבילות בדואר.

לכל אחד מתוך n חיילים יש אח אחד ששולח חבילה

החבילות מתערבבות בדואר כך שהחיילים מקבלים את החבילות בסדר מקרי, כל הסידורים אפשריים באותה מידה

(א) | 11 נק׳ |

נסמן ב-A_k את המאורע שחייל k מקבל את החבילה שאחיו שלח

חשבו את ההסתברות של A_k ואת ההסתברות של $A_k \cap A_j$

(ב) | 11 נק׳ |

נסמן ב-X את מספר החיילים שמקבלים את החבילה שנשלחה על ידי האח שלהם

חשבו את התוחלת של X

(ג) | 11 נק׳ |

חשבו את השונות של X

שאלה 2: נתונים מ״מ בלתי-תלויים X, Y כך ש-

$$Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda) \qquad \text{וכן} \qquad X \sim \mathrm{Geo}(p)$$

נגדיר $Z = \frac{X}{X+Y}$

(א) | 17 נק׳ |

חשבו את פונקצית ההתפלגות של Z

(ב) | 17 נקי |

הראו ש-Z רציף לחלוטין

שאלה 3: נתונים סדרות של מ״מ $(X_n)_n, (Y_n)_n$, לא בהכרח ב״ת.

נתון:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}[|X_n - Y_n| > 2^{-n}] < \infty.$$

(א) | 17 נקי |

הראו:

$$\mathbf{P}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}(X_n - Y_n) \quad \text{מתכנס}\Big] = 1$$

(ב) | 16 נקי |

הראו שאם $(Y_n)_n$ מתכנסת כ.ת. למ״מ Y, אז גם $(X_n)_n$ מתכנסת כ.ת. ל-Y.

נוסחאות

שם	צפיפות	התפלגות	טווח	תוחלת	שונות
$\mathrm{Ber}(p)$	$f_X(k) = \begin{cases} p & k=1 \\ 1-p & k=0 \end{cases}$	$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1-p & 0 \le t < 1 \\ 1 & t \ge 1 \end{cases}$	$\{0,1\}$	p	$p(1-p)$
$\mathrm{Bin}(n,p)$	$f_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$		$\{0,1,\dots,n\}$	np	$np(1-p)$
$\mathrm{Geo}(p)$	$f_X(k) = p(1-p)^{k-1}$	$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t<1 \\ 1-(1-p)^{\lfloor t \rfloor} & t \ge 1 \end{cases}$	$\{1,2,\dots,\}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$\mathrm{Poi}(\lambda)$	$f_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$		$\{0,1,\dots,\}$	λ	λ
$U[a,b]$	$f_X(s) = \begin{cases} 0 & s \notin [a,b] \\ \frac{1}{b-a} & s \in [a,b] \end{cases}$	$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t<a \\ \frac{t-a}{b-a} & a \le t < b \\ 1 & t \ge b \end{cases}$		$\frac{b+a}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$f_X(s) = \begin{cases} 0 & s<0 \\ \lambda e^{-\lambda s} & s \ge 0 \end{cases}$	$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1-e^{-\lambda t} & t \ge 0 \end{cases}$		$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$N(\mu,\sigma)$	$f_X(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$F_X(t) = \Phi(t)$		μ	σ^2