תאריך: 28.1.2015

מרצה: אריאל ידין

שם הקורס: הסתברות

מספר הקורס: 201.1.8001

שנה: 2015 סמסטר: א מועד: א

משך הבחינה: 3 שעות

אין חומר עזר

בהצלחה!

חלק א: שאלת חובה

חלק זה שווה 15 נקודות

(א) | 5 נק׳ |

צטטו את אי-שוויון Chebychev

(ב) | 5 נק׳ |

עבור מ״מ $X_1, \dots, X_n$, תנו תנאי הכרחי ומספיק לכך שכולם בלתי תלויים.

(ג) | 5 נק׳ |

הגדירו מ״מ דו-ממדי רציף לחלוטין

חלק ב: הוראות:

בחלק זה סה״כ 100 נקודות, כאשר הציון המקסימלי עבור חלק זה הוא 85. מותר לענות על כמה סעיפים שרוצים.

כתבו באופן ברור בתחילת המחברת על אילו שאלות עניתן. שאלה שלא ברור שעניתן עליה - לא תבדק.

כתבו באופן ברור את תשובותיכן, ונמקו כל תשובה באופן מתמטי

שאלה 1: עבור מ״מ X נתון, נגדיר פונקציה

$$\varphi_X : \mathbf{R} \to [0,\infty] \qquad \varphi_X(t) = \mathbf{E}[e^{tX}].$$

(א) | 11 נק׳ |

הסבירו מדוע φ_X תמיד מוגדרת, ותמיד חיובית ממש.

הראו שאם X, Y בלתי תלויים אז

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t) \qquad \text{וכן} \qquad \varphi_{cX}(t) = \varphi_X(ct)$$

לכל קבוע c.

(ב) | 11 נק׳ |

נניח ש-X מ״מ כך ש-$\mathbf{P}[0 \leq X \leq 1] = 1$.

עבור מספר שלם $n > 0$ נגדיר:

$$Y_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k X^k}{k!}.$$

הראו ש-$\mathbf{E}[Y_n] \to \varphi_X(t)$.

הוכיחו ש-

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbf{E}[X^k].$$

(ג) | 11 נק׳ |

חשבו את $\varphi_X(t)$ עבור $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$.

שאלה 2: נתונה סדרת מ״מ $(X_n)_n$ על מ״ה כלשהו.

(א) | 17 נק׳ |

הוכיחו שאם $(X_n)_n$ מתכנסת בהסתברות ל-X, וגם מתכנסת בהסתברות ל-Y,

אז: $\mathbf{P}[X = Y] = 1$.

(ב) | 17 נק׳ |

הוכיחו שאם $(X_n)_n$ מתכנסת בהתפלגות ל-X כך ש-$\mathbf{P}[X = c] = 1$ עבור קבוע c,

אז $(X_n)_n$ מתכנסת בהסתברות ל-X.

(*) שימו לב: מהי הפונקציה F_X, וכן מהן נקודות האי-רציפות של פונקציה זו.

שאלה 3: (א) | 11 נק׳ |

נתון מ״מ דו-ממדי רציף לחלוטין (X, Y) עם צפיפות משותפת:

$$f_{X,Y}(t,s) = \begin{cases} c & t^2 + s^2 \leq 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

חשבו את הצפיפות השולית של X ואת $\mathbf{E}[X]$ (תוצאה מספרית, ללא c).

(ב) | 11 נק׳ |

נתון מ״מ דו-ממדי רציף לחלוטין (X, Y) עם צפיפות משותפת:

$$f_{X,Y}(t,s) = \begin{cases} c & |t| + |s| \leq 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

חשבו את $\mathbf{E}[X^2]$ ואת $\mathbf{E}[Y^2]$ (תוצאה מספרית, ללא c).

(ג) | 11 נק׳ |

נסמן: $\alpha = \cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. נגדיר:

$$B = \alpha \cdot (X + Y) \qquad \text{וכן} \qquad A = \alpha \cdot (X - Y)$$

עבור X, Y מהסעיף הקודם.

חשבו את $\mathbf{Cov}(A, B)$.

נוסחאות

שם	צפיפות	התפלגות	טווח	תוחלת	שונות
$\mathrm{Ber}(p)$	$f_X(k)=\begin{cases} p & k=1 \\ 1-p & k=0 \end{cases}$	$F_X(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ 1-p & 0\leq t<1 \\ 1 & t\geq 1 \end{cases}$	$\{0,1\}$	p	$p(1-p)$
$\mathrm{Bin}(n,p)$	$f_X(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$		$\{0,1,\ldots,n\}$	np	$np(1-p)$
$\mathrm{Geo}(p)$	$f_X(k)=p(1-p)^{k-1}$	$F_X(t)=\begin{cases} 0 & t<1 \\ 1-(1-p)^{\lfloor t\rfloor} & t\geq 1 \end{cases}$	$\{1,2,\ldots,\}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$\mathrm{Poi}(\lambda)$	$f_X(k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$		$\{0,1,\ldots,\}$	λ	λ
$U[a,b]$	$f_X(s)=\begin{cases} 0 & s\notin[a,b] \\ \frac{1}{b-a} & s\in[a,b] \end{cases}$	$F_X(t)=\begin{cases} 0 & t<a \\ \frac{t-a}{b-a} & a\leq t<b \\ 1 & t\geq b \end{cases}$		$\frac{b+a}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$f_X(s)=\begin{cases} 0 & s<0 \\ \lambda e^{-\lambda s} & s\geq 0 \end{cases}$	$F_X(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ 1-e^{-\lambda t} & t\geq 0 \end{cases}$		$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$N(\mu,\sigma)$	$f_X(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$F_X(t)=\Phi(t)$		μ	σ^2