תאריך: 08.03.2013

מרצה: אריאל ידין

שם הקורס: הסתברות

מספר הקורס: 201.1.8001

שנה: 2013 סמסטר: א מועד: ב

משך הבחינה: 3 שעות

**אין חומר עזר**

הוראות:

במבחן סה״כ 115 נקודות. מותר לענות על כמה סעיפים שרוצים.

כתבו באופן ברור בתחילת המחברת על אילו שאלות עניתן. שאלה שלא ברור שעניתן עליה - לא תבדק.

כתבו באופן ברור את תשובותיכן, ונמקו כל תשובה באופן מתמטי

**בהצלחה!**

**שאלה 1:** נתונים מ״מ דו-ממדי רציף לחלוטין $(X,Y)$ כך ש-

$$f_Y(s) = \begin{cases} Cs^2 & s \in (0,1) \text{ כאשר} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

וכן, לכל $s \in (0,1)$ נתון ש-$(X|Y=s) \sim \mathrm{Exp}(s^{-1})$

**(א)** | 8 נק׳ |

חשבו את $C$ ואת $\mathbf{E}[X]$ ו-$\mathbf{E}[Y]$

**(ב)** | 8 נק׳ |

חשבו את $\mathrm{Cov}(X,Y)$ ואת $\mathrm{Var}[X+Y]$

חשבו גם את $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$

**(ג)** | 13 נקי׳ |

הוכיחו שלכל $n$ שלם חיובי, מתקיים עבור $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ ש- $\mathbf{E}[X^n] = n! \cdot \lambda^{-n}$

(רמז: אינדוקציה)

**שאלה 2:** נתון $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ וכן $Y \sim \mathrm{Ber}(1/2)$ כך ש- $X, Y$ בלתי תלויים

נסמן: $Z = (2Y-1) \cdot X$

**(א)** | 10 נקי׳ |

הראו ש- $Z$ רציף לחלוטין וחשבו את הצפיפות של $Z$

**(ב)** | 8 נקי׳ |

חשבו את $\mathbf{E}[Z^2]$

**(ג)** | 10 נקי׳ |

חשבו את $\mathrm{Cov}(X, Z)$. האם $X, Z$ בלתי תלויים? נמקו.

**שאלה 3:** נתונים מ״מ $X_1, X_2, \ldots, Y_1, Y_2, \ldots$ כך שכולם בלתי תלויים

לכל $n$ מתקיים: $X_n \sim \mathrm{Geo}(p)$ וכן $Y_n \sim \mathrm{Exp}(p)$

**(א)** | 10 נקי׳ |

הראו ש-

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big[\sum_{k=1}^{n} X_k > \sum_{k=1}^{n} Y_k\Big] = \frac{1}{2}.$$

**(ב)** | 9 נקי׳ |

חשבו את $\mathbf{E}[e^{\alpha Y_1}]$ לכל $\alpha \in (-\infty, \infty)$

**(ג)** | 10 נקי׳ |

חשבו את $\mathbf{E}[e^{\alpha(X_1+Y_1)}]$ לכל $\alpha \in (-\infty, \infty)$

**שאלה 4:** נתונים $X_1, X_2, \dots,$ בלתי תלויים כך שלכל $n$, $X_n \sim \mathrm{Geo}(p)$
לכל $n$ נסמן $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

**(א)** | 4 נק׳ |

הוכיחו שלכל $k \geq n+1$

$$\binom{k-1}{n} + \binom{k-1}{n-1} = \binom{k}{n}.$$

**(ב)** | 5 נק׳ |

השתמשו ב-(א) להראות שלכל $k \geq n+1$

$$\sum_{m=n}^{k-1} \binom{m-1}{n-1} = \binom{k-1}{n}.$$

שימו לב: הסכום בין $n$ ל-$(k-1)$

רמז: אינדוקציה על $k$

**(ג)** | 12 נק׳ |

הראו שלכל $n$ הצפיפות של $S_n$ נתונה על ידי

$$\mathbf{P}[S_n = k] = \begin{cases} \binom{k-1}{n-1} \cdot p^n (1-p)^{k-n} & \text{שלם } k \geq n, \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

**(ד)** | 8 נק׳ |

מצאו $C(p)$ כך שמתקיים שהסדרה $(\frac{1}{n} S_n)$ מתכנסת כמעט תמיד ל-$C(p)$.