תאריך: 20.2.2014

מרצה: אריאל ידין

שם הקורס: הסתברות

מספר הקורס: 201.1.8001

שנה: 2014 סמסטר: א מועד: ב

משך הבחינה: 3 שעות

אין חומר עזר

בהצלחה!

חלק א: שאלת חובה: הגדרות ומשפטים

חלק זה שווה 15 נקודות

(א) | 5 נק׳ |

הגדירו התכנסות בהתפלגות

(ב) | 5 נק׳ |

צטטו את משפט פיתגורס (עבור שונות של סכום)

(ג) | 5 נק׳ |

הגדירו תוחלת של מ״מ פשוט ושל מ״מ אי שלילי

חלק ב: הוראות:

בחלק זה סה״כ 100 נקודות, כאשר הציון המקסימלי עבור חלק זה הוא 85. מותר לענות על כמה סעיפים שרוצים.

כתבו באופן ברור בתחילת המחברת על אילו שאלות עניתן. שאלה שלא ברור שעניתן עליה - לא תבדק.

כתבו באופן ברור את תשובותיכן, ונמקו כל תשובה באופן מתמטי

שאלה 1: נתון מ״מ $U \sim U[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

לכל אחד מהסעיפים הבאים מצאו פונקציה מדידה לא קבועה $g : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbf{R}$ כך שמתקיים:

(א) | 11 נק׳ |

$$\mathbf{E}[g(U)] = \infty$$

(ב) | 11 נק׳ |

$$\mathbf{E}[g(U)] = 1$$

(ג) | 11 נק׳ |

התוחלת של $g(U)$ אינה מוגדרת

(*) בכל אחד מהסעיפים הקפידו להראות ש-g מדידה.

שאלה 2: נניח ש-$(X_n)_n$ סדרת מ״מ אי-שליליים (לא בהכרח ב״ת)

כך שלכל n מתקיים $\mathbf{E}[X_n] = \mu < \infty$

ונניח ש-N מ״מ שהוא בלתי-תלוי בסדרה $(X_n)_n$

כמו כן נניח ש-N בדיד עם טווח במספרים השלמים החיוביים, ושיש לו תוחלת סופית

נסמן $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ לכל n.

(א) | 11 נק׳ |

הראו שלכל n, המ״מ S_n, N בלתי-תלויים

(ב) | 11 נק׳ |

חשבו את התוחלת $\mathbf{E}[S_n \mathbf{1}_{\{N=n\}}]$ כפונקציה של μ ושל ההתפלגות של N

(ג) | 11 נק׳ |

הראו שמתקיים

$$\mathbf{E}[S_N] = \mathbf{E}[N] \cdot \mathbf{E}[X_1].$$

הבהרה: המ״מ S_N זו הפונקציה $S_N : \Omega \to \mathbf{R}$ הנתונה על ידי:

$$S_N(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega).$$

שאלה 3: נתונים סדרות של מ״מ $(X_n)_n, (Y_n)_n$, לא בהכרח ב״ת.

נתון: לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים ש-

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}[|X_n - Y_n| > \varepsilon] < \infty.$$

(א) | 17 נק׳ |

נגדיר את המ״מ $Z := \limsup_n |X_n - Y_n|$

הראו שלכל $\varepsilon > 0$ מתקיים: $\mathbf{P}[Z > \varepsilon] = 0$

(ב) | 17 נק׳ |

הראו שאם $(Y_n)_n$ מתכנסת כ.ת. למ״מ Y, אז גם $(X_n)_n$ מתכנסת כ.ת. ל-Y.

נוסחאות

שם	צפיפות	התפלגות	טווח	תוחלת	שונות
$\mathrm{Ber}(p)$	$f_X(k) = \begin{cases} p & k=1 \\ 1-p & k=0 \end{cases}$	$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1-p & 0 \le t < 1 \\ 1 & t \ge 1 \end{cases}$	$\{0,1\}$	p	$p(1-p)$
$\mathrm{Bin}(n,p)$	$f_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$		$\{0,1,\ldots,n\}$	np	$np(1-p)$
$\mathrm{Geo}(p)$	$f_X(k) = p(1-p)^{k-1}$	$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t<1 \\ 1-(1-p)^{\lfloor t \rfloor} & t \ge 1 \end{cases}$	$\{1,2,\ldots,\}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$\mathrm{Poi}(\lambda)$	$f_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$		$\{0,1,\ldots,\}$	λ	λ
$U[a,b]$	$f_X(s) = \begin{cases} 0 & s \notin [a,b] \\ \frac{1}{b-a} & s \in [a,b] \end{cases}$	$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t<a \\ \frac{t-a}{b-a} & a \le t < b \\ 1 & t \ge b \end{cases}$		$\frac{b+a}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$f_X(s) = \begin{cases} 0 & s<0 \\ \lambda e^{-\lambda s} & s \ge 0 \end{cases}$	$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1-e^{-\lambda t} & t \ge 0 \end{cases}$		$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$N(\mu,\sigma)$	$f_X(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$F_X(t) = \Phi(t)$		μ	σ^2