תאריך: 26.2.2015

מרצה: אריאל ידין

שם הקורס: הסתברות

מספר הקורס: 201.1.8001

שנה: 2015 סמסטר: א מועד: ב

משך הבחינה: 3 שעות

אין חומר עזר

בהצלחה!

חלק א: שאלת חובה

חלק זה שווה 15 נקודות

(א) | 5 נק׳ |

נסחו את חוק המספרים הגדולים

(ב) | 5 נק׳ |

הגדירו σ-אלגברה

(ג) | 5 נק׳ |

עבור פונקציה $F:\mathbf{R}\to[0,1]$,

מה התכונות ש-F צריכה לקיים כדי שהיא תהיה פונקצית התפלגות של מ״מ כלשהו?

חלק ב: הוראות:

בחלק זה סה״כ 100 נקודות, כאשר הציון המקסימלי עבור חלק זה הוא 85. מותר לענות על כמה סעיפים שרוצים.

כתבו באופן ברור בתחילת המחברת על אילו שאלות עניתן. שאלה שלא ברור שעניתן עליה - לא תבדק.

כתבו באופן ברור את תשובותיכן, ונמקו כל תשובה באופן מתמטי

שאלה 1: נתונה סדרת מ״מ בלתי-תלויים $(X_n)_n$.

נתון שלכל n, $\mathbf{E}[X_n] = 0$ וכן $\mathbf{Var}[X_n] < \infty$.

נסמן: $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

(א) | 10 נק׳ |

הראו שלכל $m > n$ מתקיים ש-$S_n, S_m - S_n$ מ״מ בלתי-תלויים.

(ב) | 4 נק׳ |

עבור מספר $a > 0$, נסמן:

$$A_n = \{|S_1| < a, |S_2| < a, \dots, |S_{n-1}| < a, |S_n| \geq a\}.$$

הראו שלכל $m > n$,

$$\mathbf{E}[(S_m - S_n) \cdot S_n \cdot \mathbf{1}_{A_n}] = 0.$$

(ג) | 5 נק׳ |

הוכיחו שלכל $m > n$,

$$\mathbf{E}[S_m^2 \mathbf{1}_{A_n}] \geq \mathbf{E}[S_n^2 \mathbf{1}_{A_n}].$$

(ד) | 6 נק׳ |

נגדיר:

$$M_n = \max_{1 \leq k \leq n} |S_k|.$$

הוכיחו שמתקיים

$$\mathbf{1}_{\{M_n \geq a\}} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k},$$

עבור A_k שהוגדרו למעלה.

(ה) | 8 נקי |

הסיקו שמתקיים

$$\mathbf{E}[S_n^2] \geq \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}[S_k^2 \cdot \mathbf{1}_{A_k}].$$

כעת השתמשו באי-שוויון Markov כדי להראות

$$\mathbf{P}[M_n \geq a] \leq \frac{1}{a^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}[S_k^2 \cdot \mathbf{1}_{A_k}] \leq \frac{1}{a^2} \cdot \mathbf{Var}[S_n].$$

שאלה 2: (א) | 17 נקי |

הוכיחו את הנוסחה

$$\mathbf{E}[(X^+)^2] = \int_0^\infty 2t\mathbf{P}[X > t]dt$$

עבור מ״מ רציף לחלוטין X.

(*) רמז: השתמשו בכך שלכל פונקציה חיובית בשני משתנים מתקיים

$$\int_0^\infty \int_0^x \varphi(x,y)dydx = \int_0^\infty \int_y^\infty \varphi(x,y)dxdy.$$

(ב) | 17 נקי |

הוכיחו את הנוסחה

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}[X > k]$$

עבור מ״מ בדיד X עם טווח מוכל במספרים הטבעיים, $\mathbf{P}[X \in \mathbf{N}] = 1$.

שאלה 3: נתונה סדרת מ״מ $(X_n)_n$ על מרחב הסתברות.

נתון שלכל $\varepsilon > 0$ מתקיים:

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathbf{P}[|X_n - X_m| > \varepsilon] = 0.$$

לכל k, נבחר n_k כך שלכל $n, m \geq n_k$ מתקיים

$$\mathbf{P}[|X_n - X_m| > 2^{-k}] < 2^{-k}.$$

ניתן לבחור את n_k כך שמתקיים ש-$n_{k+1} > n_k$. נסמן: $Y_k = X_{n_k}$.

(א) | 11 נק' |

נגדיר:

$$F = \limsup_k \{|Y_k - Y_{k+1}| > 2^{-k}\} = \bigcap_n \bigcup_{k \geq n} \{|Y_k - Y_{k+1}| > 2^{-k}\}.$$

הראו ש-$\mathbf{P}[F] = 0$.

(ב) | 11 נק' |

הסיקו ש-

$$\mathbf{P}[(Y_k)_k \quad \text{סדרה מתכנסת}] = \mathbf{P}[(Y_k)_k \quad \text{סדרת קושי}\ ] = 1.$$

(ג) | 11 נק' |

עבור סדרת מ"מ $(X_k)_k$ נגדיר:

$$Z(\omega) = \limsup_{k \to \infty} X_k(\omega) \qquad \text{וכן} \qquad W(\omega) = \liminf_{k \to \infty} X_k(\omega)$$

$$Y(\omega) = \begin{cases} \lim_{k \to \infty} X_k(\omega) & \text{הגבול קיים} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

הראו ש-Y אכן משתנה מקרי.

(*) רמז: השתמשו בכך שגם Z וגם W הם מ"מ. הראו ש-$A = \{Z = W\}$ הוא מאורע, וכיתבו את Y כמכפלה של מ"מ ואינדיקטור.

נוסחאות

שם	צפיפות	התפלגות	טווח	תוחלת	שונות
$\mathrm{Ber}(p)$	$f_X(k) = \begin{cases} p & k=1 \\ 1-p & k=0 \end{cases}$	$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1-p & 0 \le t < 1 \\ 1 & t \ge 1 \end{cases}$	$\{0,1\}$	p	$p(1-p)$
$\mathrm{Bin}(n,p)$	$f_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$		$\{0,1,\ldots,n\}$	np	$np(1-p)$
$\mathrm{Geo}(p)$	$f_X(k) = p(1-p)^{k-1}$	$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t<1 \\ 1-(1-p)^{\lfloor t \rfloor} & t \ge 1 \end{cases}$	$\{1,2,\ldots,\}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$\mathrm{Poi}(\lambda)$	$f_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$		$\{0,1,\ldots,\}$	λ	λ
$U[a,b]$	$f_X(s) = \begin{cases} 0 & s \notin [a,b] \\ \frac{1}{b-a} & s \in [a,b] \end{cases}$	$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t<a \\ \frac{t-a}{b-a} & a \le t < b \\ 1 & t \ge b \end{cases}$		$\frac{b+a}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$f_X(s) = \begin{cases} 0 & s<0 \\ \lambda e^{-\lambda s} & s \ge 0 \end{cases}$	$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1-e^{-\lambda t} & t \ge 0 \end{cases}$		$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$N(\mu,\sigma)$	$f_X(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$F_X(t) = \Phi(t)$		μ	σ^2