תאריך: 04.04.2013

מרצה: אריאל ידין

שם הקורס: הסתברות

מספר הקורס: 201.1.8001

שנה: 2013 סמסטר: א מועד: ג

משך הבחינה: 3 שעות

אין חומר עזר

הוראות:

במבחן סה״כ 115 נקודות. מותר לענות על כמה סעיפים שרוצים.

כתבו באופן ברור בתחילת המחברת על אילו שאלות עניתן. שאלה שלא ברור שעניתן עליה - לא תבדק.

כתבו באופן ברור את תשובותיכן, ונמקו כל תשובה באופן מתמטי

בהצלחה!

שאלה 1: **(א)** | 14 נקי' |

נניח ש-$(X_n)_n$ סדרת מ״מ בדידים כך שלכל n הטווח של X_n הוא $\{0,1,\dots,n\}$.

כמו כן, נניח ש-L מ״מ בדיד עם טווח $\{0,1,\dots,\}$ כך שמתקיים: לכל מספר שלם k,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}[X_n=k]=\mathbf{P}[L=k].$$

הוכיחו שהסדרה $(X_n)_n$ מתכנסת בהתפלגות למ״מ L

(ב) | 15 נקי' |

יהי $\lambda>0$ מספר חיובי ממשי כלשהו

לכל $n>\lambda$ נניח ש-$B_n\sim\mathrm{Bin}(n,\frac{\lambda}{n})$

הראו שהסדרה $(B_n)_n$ מתכנסת בהתפלגות למ״מ P כאשר $P\sim\mathrm{Poi}(\lambda)$

תזכורת:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-k)!\cdot n^k}=1 \qquad\qquad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n=e^{-x}$$

שאלה 2: **(א)** | 11 נקי׳ |

נניח ש-X מ״מ כך שקיים $M > 0$ כך שלכל מספר שלם $k > 0$,

$$\mathbf{E}[X^{2k}] \leq M.$$

הראו שלכל $\varepsilon > 0$ מתקיים

$$\mathbf{P}[X \geq 1 + \varepsilon] = 0.$$

(ב) | 11 נקי׳ |

הראו שעבור מ״מ X כמו בסעיף (א) מתקיים

$$\mathbf{P}[X > 1] = 0.$$

(ג) | 7 נקי׳ |

נניח שמ״מ Y מקיים $\mathbf{P}[-1 \leq Y \leq 1] = 1$

הוכיחו שקיים $M > 0$ כך שלכל מספר שלם $k > 0$,

$$\mathbf{E}[Y^{2k}] \leq M.$$

שאלה 3: נתון מ״מ תלת-ממדי (X, Y, Z) רציף לחלוטין בעל צפיפות

$$f_{X,Y,Z}(t,s,r) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & t^2 + s^2 \leq 1\ ,\ |r| \leq 1 \text{ :עבור} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

*ניתן להשתמש בכך שמתקיים:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\ dx = \frac{\pi}{2}.$$

(א) | 10 נקי׳ |

חשבו את הצפיפויות השוליות של X ושל Z

(ב) | 10 נקי׳ |

חשבו את השונות של Z

(ג) | 9 נקי׳ |

הראו ש-X, Y בלתי מתואמים

שאלה 4: (א) | 14 נק׳ |

נתונים מ״מ בלתי תלויים $X \sim \mathrm{Poi}(\alpha)$ וכן $Y \sim \mathrm{Poi}(\beta)$.

נסמן $Z = X + Y$. הוכיחו ש-$Z \sim \mathrm{Poi}(\alpha+\beta)$

(ב) | 14 נק׳ |

נתונים מ״מ בלתי תלויים $X \sim \mathrm{Exp}(\alpha)$ וכן $Y \sim \mathrm{Exp}(\beta)$

נסמן $Z = \min\{X, Y\}$. הוכיחו ש-$Z \sim \mathrm{Exp}(\alpha+\beta)$

נוסחאות

שם	צפיפות	התפלגות	טווח	תוחלת	שונות
$\mathrm{Ber}(p)$	$f_X(k) = \begin{cases} p & k=1 \\ 1-p & k=0 \end{cases}$	$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1-p & 0 \le t < 1 \\ 1 & t \ge 1 \end{cases}$	$\{0,1\}$	p	$p(1-p)$
$\mathrm{Bin}(n,p)$	$f_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$		$\{0,1,\ldots,n\}$	np	$np(1-p)$
$\mathrm{Geo}(p)$	$f_X(k) = p(1-p)^{k-1}$	$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t<1 \\ 1-(1-p)^{\lfloor t \rfloor} & t \ge 1 \end{cases}$	$\{1,2,\ldots,\}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$\mathrm{Poi}(\lambda)$	$f_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$		$\{0,1,\ldots,\}$	λ	λ
$U[a,b]$	$f_X(s) = \begin{cases} 0 & s \notin [a,b] \\ \frac{1}{b-a} & s \in [a,b] \end{cases}$	$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t<a \\ \frac{t-a}{b-a} & a \le t < b \\ 1 & t \ge b \end{cases}$		$\frac{b+a}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$f_X(s) = \begin{cases} 0 & s<0 \\ \lambda e^{-\lambda s} & s \ge 0 \end{cases}$	$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1-e^{-\lambda t} & t \ge 0 \end{cases}$		$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$N(\mu,\sigma)$	$f_X(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$F_X(t) = \Phi(t)$		μ	σ^2