

תאריך: 12.3.2014  
מרצה: אריאל ידין  
שם הקורס: הסתברות  
מספר הקורס: 201.1.8001  
שנה: 2014 סמסטר: א מועד: ג  
משך הבחינה: 3 שעות  
**אין חומר עזר**

**בהצלחה!**

**חלק א: שאלת חובה: הגדרות ומשפטים**  
חלק זה שווה 15 נקודות

**(א) | 5 נקי |**

צטטו את הלמה הראשונה של Borel-Cantelli

**(ב) | 5 נקי |**

הגדירו מ"מ בדיד

**(ג) | 5 נקי |**

הגדירו מ"מ דו-ממדי רציף לחלוטין

**חלק ב: הוראות:**

בחלק זה סה"כ 100 נקודות, כאשר הציון המקסימלי עבור חלק זה הוא 85. מותר לענות על כמה סעיפים שרוצים. כתבו באופן ברור בתחילת המחברת על אילו שאלות עניתן. שאלה שלא ברור שעניתן עליה - לא תבדק.

כתבו באופן ברור את תשובותיכן, ונמקו כל תשובה באופן מתמטי

**שאלה 1:** נתונה סדרת מ"מ בלתי-תלויים,  $U_1, \dots, U_n, \dots$ ,

כך שלכל  $n$  מתקיים ש-  $U_n \sim U[0, 1]$ .

נתון מ"מ  $P \sim \text{Poi}(\lambda)$  כך ש-  $P$  בלתי תלוי בסדרה  $(U_n)_n$ .

**(א)** | 15 נק' |

נגדיר מ"מ  $X$  על ידי

$$X = \begin{cases} \min\{U_1, \dots, U_P\} & \text{אם } P > 0 \\ 1 & \text{אם } P = 0 \end{cases}$$

חשבו את פונקציית ההתפלגות של  $X$ . האם  $X$  מ"מ רציף?

**(ב)** | 15 נק' |

נתון מ"מ  $E \sim \text{Exp}(\lambda)$  ונגדיר  $Y = \min\{1, E\}$

חשבו את פונקציית ההתפלגות של  $Y$

**(ג)** | 7 נק' |

חשבו את  $E[X - Y]$ . הראו שתוחלת זו אכן מוגדרת.

**שאלה 2:** נתון מיימ  $U \sim U[-1, 1]$ .

לכל אחד מהסעיפים הבאים מצאו פונקציות לא קבועות ומדידות  $g, h : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  כך שמתקיים:

(א) | 11 נקי |

המיימ  $g(U), h(U)$  בלתי-תלויים

(ב) | 11 נקי |

המיימ  $g(U), h(U)$  בלתי-מתואמים אבל לא בלתי-תלויים

(ג) | 11 נקי |

המיימ  $g(U), h(U)$  לא בלתי-מתואמים

(\*) בכל אחד מהסעיפים הקפידו להראות ש- $g, h$  מדידות

**שאלה 3:** מהמר משחק שוב ושוב משחק

בו הוא מרויח שקל בהסתברות  $p \in (0, 1)$  ומפסיד שקל בהסתברות  $q = 1 - p$

כל המשחקים בלתי תלויים

המהמר עוזב את המשחק פעם ראשונה שהוא מורווח או מופסד 2 שקלים

(א) | 15 נקי |

נסמן ב- $X$  את מספר המשחקים שה"כ שהמהמר משחק.

הראו ש- $X$  משתנה בדיד וחישובו את ההתפלגות של  $X$ .

רמז: חישבו את ההסתברות של  $\{X > 2k\}$ . הראו ש-

$$\mathbf{P}[X > 2(k + 1)] = 2pq \cdot \mathbf{P}[X > 2k].$$

(ב) | 15 נקי |

מה ההסתברות שהמהמר יוצא מורווח 2 שקלים?

נוסחאות

שונות	תוחלת	טווח	התפלגות	צפיפות	שם
$p(1-p)$	$p$	$\{0, 1\}$	$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1-p & 0 \leq t < 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$	$f_X(k) = \begin{cases} p & k = 1 \\ 1-p & k = 0 \end{cases}$	Ber( $p$ )
$np(1-p)$	$np$	$\{0, 1, \dots, n\}$		$f_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	Bin( $n, p$ )
$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{1}{p}$	$\{1, 2, \dots\}$	$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 1 - (1-p)^{\lfloor t \rfloor} & t \geq 1 \end{cases}$	$f_X(k) = p(1-p)^{k-1}$	Geo( $p$ )
$\lambda$	$\lambda$	$\{0, 1, \dots\}$		$f_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	Poi( $\lambda$ )
$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{b+a}{2}$		$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & a \leq t < b \\ 1 & t \geq b \end{cases}$	$f_X(s) = \begin{cases} 0 & s \notin [a, b] \\ \frac{1}{b-a} & s \in [a, b] \end{cases}$	$U[a, b]$
$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{1}{\lambda}$		$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases}$	$f_X(s) = \begin{cases} 0 & s < 0 \\ \lambda e^{-\lambda s} & s \geq 0 \end{cases}$	Exp( $\lambda$ )
$\sigma^2$	$\mu$		$F_X(t) = \Phi(t)$	$f_X(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$N(\mu, \sigma)$