תאריך: 24.3.2015

מרצה: אריאל ידין

שם הקורס: הסתברות

מספר הקורס: 201.1.8001

שנה: 2015 סמסטר: א מועד: ג

משך הבחינה: 3 שעות

אין חומר עזר

בהצלחה!

חלק א: שאלת חובה

חלק זה שווה 15 נקודות

(א) | 5 נק׳ |

נסחו את משפט ההתכנסות המונוטונית

(ב) | 5 נק׳ |

הגדירו מידת הסתברות

(ג) | 5 נק׳ |

הגדירו התכנסות בהתפלגות

חלק ב: הוראות:

בחלק זה סה״כ 100 נקודות, כאשר הציון המקסימלי עבור חלק זה הוא 85. מותר לענות על כמה סעיפים שרוצים.

כתבו באופן ברור בתחילת המחברת על אילו שאלות עניתן. שאלה שלא ברור שעניתן עליה - לא תבדק.

כתבו באופן ברור את תשובותיכן, ונמקו כל תשובה באופן מתמטי

שאלה 1: (א) | 11 נק׳ |

נתונים מ״מ בלתי תלויים $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ וכן $Y \sim \mathrm{Ber}(p)$.

נגדיר $Z = X + Y$.

הראו ש-$Z \sim \mathrm{Bin}(n+1,p)$.

(ב) | 11 נק׳ |

נתונים מ״מ בלתי תלויים $A \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ וכן $B \sim \mathrm{Bin}(m,p)$.

הראו ש-$A + B \sim \mathrm{Bin}(n+m,p)$.

(ג) | 11 נק׳ |

הוכיחו את הזהות הבאה לכל $m \geq n$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \binom{m}{n-k} = \binom{m+n}{n}.$$

שאלה 2: (א) | 12 נק׳ |

נתונים שני מ״מ בדידים בלתי-תלויים X,Y.

נתון של-X ול-Y יש אותה התפלגות.

נסמן: $p=\mathbf{P}[X=Y]$.

הראו שמתקיים:

$$\mathbf{P}[X<Y]=\mathbf{P}[Y<X]=\frac{1-p}{2}.$$

(ב) | 11 נק׳ |

נתונים שני מ״מ X,Y בלתי-תלויים, רציפים לחלוטין, עם אותה התפלגות.

הראו שמתקיים:

$$\mathbf{P}[X<Y]=\frac{1}{2}.$$

רמז: השתמשו בכך שעבור הקבוצה $A=\{(x,y)\ :\ x<y\}$ מתקיים

$$\int\int_A \varphi(x,y)dydx=\int_{-\infty}^{\infty}(\int_x^{\infty}\varphi(x,y)dy)dx,$$

לכל פונקציה $\varphi:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$.

אפשר להוכיח גם בלי להשתמש ברמז.

(ג) | 11 נק׳ |

בשיטה דומה לסעיף (ב) אפשר להוכיח שאם

X,Y,Z מ״מ בלתי-תלויים, עם אותה התפלגות, רציפים לחלוטין, אז: $\mathbf{P}[X<Y<Z]=\frac{1}{6}$

אינכם צריכים להוכיח זאת!

כעת, עבור $n>2$, נתונים $X_1,\ldots,X_n$ מ״מ בלתי-תלויים שכולם מתפלגים $X_i\sim\mathcal{N}(0,1)$, לכל i.

נסמן:

$$N=\#\{i\ :\ 2\leq i\leq n\ ,\ X_{i-1}<X_i\}.$$

כלומר, N זה מספר האינדקסים i עבורם X_i גדול מ-X_{i-1}.

חשבו את $\mathbf{E}[N]$ ואת $\mathbf{Var}[N]$ כפונקציה של n.

שאלה 3: (א) | 11 נק׳ |

נתון מ״מ $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma)$.

חשבו את התוחלת: $\mathbf{E}[|X|]$ כפונקציה של σ.

(ב) | 11 נק׳ |

נתון מ״מ דו-ממדי (X,Y) רציף לחלוטין עם צפיפות משותפת

$$f_{X,Y}(t,s) = \begin{cases} c \cdot \frac{|s|}{t} \cdot e^{-(s/t)^2} & s \in \mathbf{R}\ ,\ 0 < t < 1 \text{ :כאשר} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

חשבו את c.

(ג) | 11 נק׳ |

חשבו את הצפיפות השולית של X עבור X,Y מהסעיף הקודם.

נוסחאות

שם	צפיפות	התפלגות	טווח	תוחלת	שונות
$\mathrm{Ber}(p)$	$f_X(k) = \begin{cases} p & k=1 \\ 1-p & k=0 \end{cases}$	$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1-p & 0 \le t < 1 \\ 1 & t \ge 1 \end{cases}$	$\{0,1\}$	p	$p(1-p)$
$\mathrm{Bin}(n,p)$	$f_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$		$\{0,1,\dots,n\}$	np	$np(1-p)$
$\mathrm{Geo}(p)$	$f_X(k) = p(1-p)^{k-1}$	$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t<1 \\ 1-(1-p)^{\lfloor t \rfloor} & t \ge 1 \end{cases}$	$\{1,2,\dots,\}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$\mathrm{Poi}(\lambda)$	$f_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$		$\{0,1,\dots,\}$	λ	λ
$U[a,b]$	$f_X(s) = \begin{cases} 0 & s \notin [a,b] \\ \frac{1}{b-a} & s \in [a,b] \end{cases}$	$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t<a \\ \frac{t-a}{b-a} & a \le t < b \\ 1 & t \ge b \end{cases}$		$\frac{b+a}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$f_X(s) = \begin{cases} 0 & s<0 \\ \lambda e^{-\lambda s} & s \ge 0 \end{cases}$	$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1-e^{-\lambda t} & t \ge 0 \end{cases}$		$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$N(\mu,\sigma)$	$f_X(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$F_X(t) = \Phi(t)$		μ	σ^2