תאריך הבחינה: 9.2.2012
שם המרצה: אריאל ידין
שם הקורס: הסתברות
מספר הקורס: 201.1.8001
שנה: 2012 סמסטר א מועד א
משך הבחינה: 3 שעות
אין חומר עזר

במבחן סה"כ 115 נקודות. מותר לענות על כמה סעיפים שרוצים. כתבו בתחילת המחברת על איזה שאלות וסעיפים עניתם.
סעיף שלא ברור שעניתם עליו - לא ייבדק. בהצלחה!

1. [תזכורת: עבור סדרת מספרים $(a_n)_n$ מגדירים: $\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k$]

נניח $(X_n)_n$ סדרת משתנים מקריים אי שליליים על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

נסמן: $Y_n(\omega) = \inf_{k\geq n} X_k(\omega)$ לכל n, וכן $Y(\omega) = \liminf_{n\to\infty} X_n(\omega)$.

נניח שלכל $\omega \in \Omega$ מתקיים $Y(\omega) < \infty$.

(א) [9 נק'] נניח ש־ $(Z_n)_n$ סדרת משתנים מקריים כך שלכל $\omega \in \Omega$ מתקיים $-\infty < \inf_n Z_n(\omega)$ וכן $\sup_n Z_n(\omega) < \infty$.
הראו שלכל t,

$$\{\inf_n Z_n \leq t\} = \bigcap_m \bigcup_n \{Z_n \leq t + \frac{1}{m}\}$$

הסיקו ש־ $\inf_n Z_n$ הוא משתנה מקרי.
הראו בדרך דומה שגם $\sup_n Z_n$ הוא משתנה מקרי.

(ב) [7 נק'] השתמשו ב־(א) להראות ש־Y_n משתנה מקרי אי שלילי לכל n, וכן ש־$(Y_n)_n$ סדרה מונוטונית עולה.
הסיקו גם ש־Y משתנה מקרי.

(ג) [7 נק'] הראו ש־$\mathbb{E}[Y] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y_n]$. באיזה משפט השתמשתם?

(ד) [7 נק'] הראו שלכל $k \geq n$ מתקיים $\mathbb{E}[Y_n] \leq \mathbb{E}[X_k]$.
הסיקו ש־ $\mathbb{E}[Y_n] \leq \inf_{k\geq n} \mathbb{E}[X_k]$
וכן הסיקו ש־$\mathbb{E}\left[\liminf_{n\to\infty} X_n\right] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n]$.

2. סיזיפוס דוחף כדור אבן ענק במעלה הר.

בכל צעד הוא מתקדם מטר למעלה בהסתברות p ומתדרדר מטר למטה בהסתברות $1-p$. כל הצעדים בלתי תלויים.

(א) [10 נק'] מה התוחלת והשונות של השינוי בגובה (כלפי מעלה) של סיזיפוס בצעד אחד?

(ב) [9 נק'] נסמן ב־S_n את השינוי בגובה של סיזיפוס לאחר n צעדים. מה התוחלת והשונות של S_n?

(ג) [11 נק'] מצאו p כך ש־$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[S_n \leq \frac{n}{4}\right] = \frac{1}{2}$. הוכיחו את תשובתכם.

3. נתונים $n, m > 0$ מספרים שלמים.

X, Y משתנים מקריים בדידים עם צפיפות משותפת

$$f_{X,Y}(j,k) = \begin{cases} \binom{n}{j}\binom{m}{k-j} \cdot p^k (1-p)^{n+m-k} & 0 \leq j \leq n,\ j \leq k \leq m+j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(א) [6 נק'] מצאו את הצפיפות השולית של X.

(ב) [10 נק'] כתבו טווח אפשרי עבור $Y - X$ וחשבו את הצפיפות של $Y - X$.

(ג) [6 נק'] הראו ש־X ו־$(Y - X)$ בלתי תלויים.

(ד) [8 נק'] מצאו את $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y]$ ואת $\mathrm{Cov}[X,Y]$.

4. למשתנה מקרי X יש פונקציית התפלגות

$$F_X(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ Ct^2 & 0\le t<1\\ 1 & t\ge 1\end{cases}$$

(א) [9 נק'] הראו שקיים $C>0$ כך ש־X רציף לחלוטין וחשבו את הצפיפות של X.

(ב) [8 נק'] חשבו את התוחלת של X.

(ג) [8 נק'] חשבו את השונות של X.

נוסחאות

X	צפיפות	התפלגות	טווח	תוחלת	שונות
$Ber(p)$	$f_X(k)=\begin{cases}p & k=1\\ 1-p & k=0\end{cases}$	$F_X(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1-p & 0\le t<1\\ 1 & 1\le t\end{cases}$	$\{0,1\}$	p	$p(1-p)$
$Bin(n,p)$	$f_X(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$		$\{0,1,\dots,n\}$	np	$np(1-p)$
$Geo(p)$	$f_X(k)=(1-p)^{k-1}p$	$F_X(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ 1-(1-p)^{-\lfloor t\rfloor} & t\ge 1\end{cases}$	$\{1,2,\dots\}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$Poi(\lambda)$	$f_X(k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$		$\{0,1,\dots\}$	λ	λ
$U[a,b]$	$f_X(s)=\begin{cases}0 & s\notin[a,b]\\ \frac{1}{b-a} & s\in[a,b]\end{cases}$	$F_X(t)=\begin{cases}0 & t<a\\ \frac{t-a}{b-a} & a\le t<b\\ 1 & t\ge b\end{cases}$		$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$Exp(\lambda)$	$f_X(s)=\begin{cases}0 & s<0\\ \lambda e^{-\lambda s} & s\ge 0\end{cases}$	$F_X(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1-e^{-\lambda t} & t\ge 0\end{cases}$		$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$N(\mu,\sigma)$	$f_X(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}}$			μ	σ^2

$$\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k=\frac{1}{1-\alpha}\qquad 0<\alpha<1$$

אם X מ"מ d־ממדי בדיד עם טווח R^d, אז לכל פונקציה מדידה $g:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ מתקיים

$$\mathbb{E}[g(X)]=\sum_{\vec{r}\in R^d}g(\vec{r})f_X(\vec{r})$$

אם X מ"מ d־ממדי רציף לחלוטין (כוקטור), אז לכל פונקציה מדידה $g:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ מתקיים

$$\mathbb{E}[g(X)]=\int_{\mathbb{R}^d}g(\vec{r})f_X(\vec{r})\,d\vec{r}$$