תאריך הבחינה: 1.3.2012
שם המרצה: אריאל ידין
שם הקורס: הסתברות
מספר הקורס: 201.1.8001
שנה: 2012 סמסטר א מועד ב
משך הבחינה: 3 שעות
אין חומר עזר

במבחן סה"כ 115 נקודות. מותר לענות על כמה סעיפים שרוצים. כתבו בתחילת המחברת על איזה שאלות וסעיפים עניתם. סעיף שלא ברור שעניתם עליו - לא ייבדק. בהצלחה!

1. [(*) תזכורת (הלמה של Fatou עבור משתנים מקריים אי שליליים): אם $(X_n)_n$ סדרת משתנים מקריים אי שליליים אז $\limsup_{n\to\infty} X_n$ הוא משתנה מקרי, ומתקיים $\mathbb{E}[\limsup_{n\to\infty} X_n] \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n]$.]

נניח ש-$(X_n)_n$ סדרת משתנים מקריים על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

נניח שקיים משתנה מקרי $Y \geq 0$ כך ש-$\mathbb{E}[Y] < \infty$ וכן לכל n מתקיים $|X_n| \leq Y$.

נניח ש-$X_n \to X$ (כלומר $X_n(\omega) \to X(\omega)$ לכל $\omega \in \Omega$) עבור משתנה מקרי X כלשהו.

(א) [12 נק'] לכל n נגדיר $Z_n := |X - X_n|$.
הראו שקיים משתנה מקרי $W \geq 0$ כך ש-$\mathbb{E}[W] < \infty$, וכן לכל n מתקיים ש- $Z_n \leq W$.

(ב) [10 נק'] הראו שמתקיים $\mathbb{P}[\limsup_{n\to\infty} Z_n = 0] = 1$ והסיקו ש- $\mathbb{E}[\limsup_{n\to\infty} Z_n] = 0$.

(ג) [7 נק'] השתמשו בלמה של Fatou למשתנים מקריים אי שליליים (למעלה) להראות ש- $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[Z_n] = 0$.
הסיקו ש-$(X_n)_n$ מתכנסת ל-X ב-L^1.

2. [(*) תזכורת: פונקציה $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ נקראת <u>אי־זוגית</u> אם לכל $t \in \mathbb{R}$ מתקיים ש-$g(-t) = -g(t)$.]

(א) [10 נק'] תנו דוגמא לפונקציה מדידה אי־זוגית $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ומשתנה מקרי X כך ש- $\mathbb{E}[X] = 0$ אבל $\mathbb{E}[g(X)] \neq 0$.

(ב) [10 נק'] משתנה מקרי X נקרא <u>סימטרי</u> אם לכל t מתקיים $F_X(t) = F_{-X}(t)$.
הראו שמשתנה מקרי בדיד X הוא סימטרי אם ורק אם לכל r מתקיים $\mathbb{P}[X = r] = \mathbb{P}[X = -r]$.

(ג) [9 נק'] הראו שאם X משתנה מקרי בדיד וסימטרי אז לכל פונקציה מדידה אי־זוגית $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כך שיש ל-$g(X)$ תוחלת, מתקיים ש-$\mathbb{E}[g(X)] = 0$.

3. נתון משתנה מקרי בדיד X עם טווח R וצפיפות f_X. נתון משתנה מקרי בדיד נוסף Y.
לכל r כך ש-$\mathbb{P}[X = r] > 0$ נסמן: $Z_r := Y | X = r$.

(א) [10 נק'] הראו שלכל פונקציה מדידה $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מתקיים

$$\mathbb{E}[g(X)Y] = \sum_{r \in R} g(r) f_X(r) \mathbb{E}[Z_r]$$

(ב) [10 נק'] נניח שהצפיפות המשותפת של (X, Y) נתונה על ידי

$$f_{X,Y}(n,k) = \begin{cases} \binom{n-1}{k} \cdot p^{k+1}(1-p)^{2n-k-2} & 0 \leq k \leq n-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

חשבו את הצפיפות השולית של X ואת הצפיפות המותנה $f_{Y|X}(\cdot|n)$ לכל $n \geq 1$.
מה התוחלת של $Y|X = n$?

(ג) [9 נק'] חשבו את התוחלות של: X, Y, $X \cdot Y$, וכן את $\mathrm{Cov}[X,Y]$ (רמז: השתמשו ב-(א)).

4. נתון: $X \sim U[1,2]$ וגם $Y = \frac{1}{X}$.

(א) [9 נק'] חשבו את $F_Y(t)$ לכל t.

(ב) [10 נק'] הראו ש־Y רציף לחלוטין וחשבו את הצפיפות של Y.

(ג) [9 נק'] חשבו את $\mathbb{E}[Y]$ ואת $\mathbb{E}[Y^2]$.

נוסחאות

X	צפיפות	התפלגות	טווח	תוחלת	שונות
$Ber\left(p\right)$	$f_X\left(k\right) = \begin{cases} p & k=1 \\ 1-p & k=0 \end{cases}$	$F_X\left(t\right) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1-p & 0 \le t < 1 \\ 1 & 1 \le t \end{cases}$	$\{0,1\}$	p	$p\left(1-p\right)$
$Bin\left(n,p\right)$	$f_X\left(k\right) = \binom{n}{k} p^k \left(1-p\right)^{n-k}$		$\{0,1,\ldots,n\}$	np	$np\left(1-p\right)$
$Geo\left(p\right)$	$f_X\left(k\right) = \left(1-p\right)^{k-1} p$	$F_X\left(t\right) = \begin{cases} 0 & t<1 \\ 1-\left(1-p\right)^{-\lfloor t \rfloor} & t \ge 1 \end{cases}$	$\{1,2,\ldots\}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$Poi\left(\lambda\right)$	$f_X\left(k\right) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$		$\{0,1,\ldots\}$	λ	λ
$U\left[a,b\right]$	$f_X\left(s\right) = \begin{cases} 0 & s \notin [a,b] \\ \frac{1}{b-a} & s \in [a,b] \end{cases}$	$F_X\left(t\right) = \begin{cases} 0 & t<a \\ \frac{t-a}{b-a} & a \le t < b \\ 1 & t \ge b \end{cases}$		$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$Exp\left(\lambda\right)$	$f_X\left(s\right) = \begin{cases} 0 & s<0 \\ \lambda e^{-\lambda s} & s \ge 0 \end{cases}$	$F_X\left(t\right) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1-e^{-\lambda t} & t \ge 0 \end{cases}$		$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$N\left(\mu,\sigma\right)$	$f_X\left(s\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}}$			μ	σ^2

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha} \qquad 0 < \alpha < 1$$

אם X מ"מ d־ממדי בדיד עם טווח R^d, אז לכל פונקציה מדידה $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ מתקיים

$$\mathbb{E}\left[g\left(X\right)\right] = \sum_{\vec{r} \in R^d} g\left(\vec{r}\right) f_X\left(\vec{r}\right)$$

אם X מ"מ d־ממדי רציף לחלוטין (כוקטור), אז לכל פונקציה מדידה $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ מתקיים

$$\mathbb{E}\left[g\left(X\right)\right] = \int_{\mathbb{R}^d} g\left(\vec{r}\right) f_X\left(\vec{r}\right) d\vec{r}$$