תאריך הבחינה: 3.4.2012
שם המרצה: אריאל ידין
שם הקורס: הסתברות
מספר הקורס: 201.1.8001
שנה: 2012 סמסטר א מועד ג
משך הבחינה: 3 שעות
אין חומר עזר

במבחן סה"כ 115 נקודות. מותר לענות על כמה סעיפים שרוצים. כתבו בתחילת המחברת על איזה שאלות וסעיפים עניתם. סעיף שלא ברור שעניתם עליו - לא ייבדק. בהצלחה!

1. נתון משתנה מקרי $X \geq 0$. נניח של־X מומנט שני סופי. נסמן $\mu = \mathbb{E}[X]$. יהי $\lambda \in [0,1]$. נגדיר $Y = \mathbf{1}_{\{X \leq \lambda\mu\}}$ וכן $Z = \mathbf{1}_{\{X > \lambda\mu\}}$.
   (א) [8 נק'] הראו ש־ $Y + Z = 1$, ש־ $XY \leq \lambda\mu$, וכן ש־ $\mathbb{E}[XZ] \geq (1-\lambda)\mu$
   (ב) [6 נק'] הראו ש־ $(\mathbb{E}[XZ])^2 \leq \mathbb{E}[X^2] \cdot \mathbb{P}[X > \lambda\mu]$
   (ג) [6 נק'] הסיקו שמתקיים $\mathbb{P}[X > \lambda\mu] \geq (1-\lambda)^2 \cdot \frac{(\mathbb{E}[X])^2}{\mathbb{E}[X^2]}$
   (ד) [6 נק'] נניח $X \sim \mathrm{Exp}(\alpha)$ עבור $\alpha \in (0,1)$. העריכו מלמטה את $\mathbb{P}[X > \frac{1-\alpha}{\alpha}]$ והראו ש־ $e^{-(1-\alpha)} \geq \frac{\alpha^2}{2}$.

2. הגדרה: מספר $m \in \mathbb{R}$ נקרא <u>חציון</u> עבור X אם מתקיים $\mathbb{P}[X \geq m] \geq \frac{1}{2}$ וכן $\mathbb{P}[X \leq m] \geq \frac{1}{2}$
   (א) [6 נק'] נניח ש־X מ"מ עם מומנט שני סופי. נסמן $\mu = \mathbb{E}[X]$.
   הראו שלכל $c \in \mathbb{R}$ מתקיים $\mathbb{E}[(X-\mu)^2] \leq \mathbb{E}[(X-c)^2]$
   (ב) [7 נק'] נניח X מ"מ עם מומנט שני סופי. נניח $t > s \in \mathbb{R}$, ונגדיר

$$A = \{X \leq s\} \qquad B = \{s < X < t\} \qquad C = \{X \geq t\}$$

   הראו שמתקיים $1 = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C$ וכן מתקיים

$$|X - s| = (s - X)\mathbf{1}_A + (X - s)\mathbf{1}_B + (X - s)\mathbf{1}_C$$

$$|X - t| = (t - X)\mathbf{1}_A + (t - X)\mathbf{1}_B + (X - t)\mathbf{1}_C$$

   (ג) [6 נק'] הראו שמתקיים

$$\mathbb{E}[|X - s|] - \mathbb{E}[|X - t|] = (s - t) \cdot (\mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[C]) + 2\mathbb{E}[(X - t)\mathbf{1}_B]$$

   (ד) [6 נק'] הראו שאם $\mathbb{P}[A] \geq \frac{1}{2}$ אז $\mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[C] \leq \mathbb{P}[A]$. הסיקו שבמקרה הזה $\mathbb{E}[|X - s|] \leq \mathbb{E}[|X - t|]$.
   (ד) [6 נק'] נניח ש־Y מ"מ עם מומנט שני סופי, וכן $r \in \mathbb{R}$ כך ש־ $\mathbb{P}[Y \geq r] \geq \frac{1}{2}$.
   השתמשו ב־(א) להראות שלכל $p < r$ מתקיים $\mathbb{E}[|Y - r|] \leq \mathbb{E}[|Y - p|]$
   (ה) [3 נק'] הסיקו שאם m חציון עבור X, ואם יש ל־X מומנט שני סופי,
   אז לכל $c \in \mathbb{R}$ מתקיים $\mathbb{E}[|X - m|] \leq \mathbb{E}[|X - c|]$

3. נתון $X \sim U[0,1]$. נגדיר $Y = \frac{1}{\sqrt{X}}$

(א) [12 נק'] הראו ש-Y מ"מ רציף לחלוטין וחשבו את הצפיפות של Y.

(ב) [9 נק'] חשבו את התוחלת של Y.

(ג) [9 נק'] הראו שהמומנט השני של Y הוא אינסוף.

4. נתון מ"מ X רציף לחלוטין עם צפיפות $f_X(s) = \begin{cases} \cos(s) & s \in [0, \pi/2] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

(א) [8 נק'] הראו ש-f_X אכן צפיפות.

(ב) [7 נק'] חשבו את התוחלת של X (רמז: מה הנגזרת של $x \sin(x) + \cos(x)$?)

(ג) [10 נק'] נגדיר $Y = \frac{1}{X}$. הראו ש-Y מ"מ רציף לחלוטין עם צפיפות $f_Y(s) = \begin{cases} \frac{\cos(1/t)}{t^2} & t \geq \frac{2}{\pi} \\ 0 & t < \frac{2}{\pi} \end{cases}$

נוסחאות

X	צפיפות	התפלגות	טווח	תוחלת	שונות
$Ber\left(p\right)$	$f_X\left(k\right) = \begin{cases} p & k=1 \\ 1-p & k=0 \end{cases}$	$F_X\left(t\right) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1-p & 0 \leq t < 1 \\ 1 & 1 \leq t \end{cases}$	$\{0,1\}$	p	$p\left(1-p\right)$
$Bin\left(n,p\right)$	$f_X\left(k\right) = \binom{n}{k} p^k \left(1-p\right)^{n-k}$		$\{0,1,\ldots,n\}$	np	$np\left(1-p\right)$
$Geo\left(p\right)$	$f_X\left(k\right) = \left(1-p\right)^{k-1} p$	$F_X\left(t\right) = \begin{cases} 0 & t<1 \\ 1-\left(1-p\right)^{\lfloor t \rfloor} & t \geq 1 \end{cases}$	$\{1,2,\ldots\}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$Poi\left(\lambda\right)$	$f_X\left(k\right) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$		$\{0,1,\ldots\}$	λ	λ
$U\left[a,b\right]$	$f_X\left(s\right) = \begin{cases} 0 & s \notin [a,b] \\ \frac{1}{b-a} & s \in [a,b] \end{cases}$	$F_X\left(t\right) = \begin{cases} 0 & t<a \\ \frac{t-a}{b-a} & a \leq t < b \\ 1 & t \geq b \end{cases}$		$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$Exp\left(\lambda\right)$	$f_X\left(s\right) = \begin{cases} 0 & s<0 \\ \lambda e^{-\lambda s} & s \geq 0 \end{cases}$	$F_X\left(t\right) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1-e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases}$		$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$N\left(\mu,\sigma\right)$	$f_X\left(s\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}}$			μ	σ^2

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha} \qquad 0 < \alpha < 1$$

אם X מ"מ d-ממדי בדיד עם טווח R^d, אז לכל פונקציה מדידה $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ מתקיים

$$\mathbb{E}\left[g\left(X\right)\right] = \sum_{\vec{r} \in R^d} g\left(\vec{r}\right) f_X\left(\vec{r}\right)$$

אם X מ"מ d-ממדי רציף לחלוטין (כוקטור), אז לכל פונקציה מדידה $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ מתקיים

$$\mathbb{E}\left[g\left(X\right)\right] = \int_{\mathbb{R}^d} g\left(\vec{r}\right) f_X\left(\vec{r}\right) d\vec{r}$$