

בחינה בקורס יסודות האנליזה להנדסת חשמל 1, תאריך 17.07.2025, מועד א'
מספר הקורס: 201-2-5331
המרצה: פרופ' ארקדי ליידרמן

- משך הבחינה: 3 שעות
- יש לענות על כל 4 שאלות. סך הניקוד שניתן לצבור במבחן הינו 110, אבל הציון המירבי במבחן הינו 100.
- יש לנמק ולהוכיח את כל טענותיכם!
- חומר עזר המותר: כל נבחן רשאי להביא 2 דפי רשימות בגודל סטנדרטי A4. אין מחשבוני.
- בכל שאלה/סעיף (פרט לסעיף הבנוס 3) ניתן לכתוב "לא יודע/ לא יודעת" ולקבל 20% מהנקודות.
- שאלות/סעיפים בהם כתבתם "לא יודע/ לא יודעת" לא ייבדקו.

שאלה 1 (א) (10 נקודות) בקבוצה \mathbb{N} של מספרים טבעיים נגדיר

$$d(m, n) = \left| \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right|$$

הוכיחו כי d מגדירה מטריקה בקבוצה \mathbb{N} .
(ב) (15 נקודות) האם (\mathbb{N}, d) מרחב מטרי שלם?

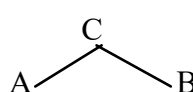
שאלה 2 יהיו (X, d) מרחב מטרי קומפקטי, קבוצה $A \subset X$ סגורה לא ריקה ומספר סופי של נקודות שונות $z_1, z_2, \dots, z_n \in X \setminus A$. נגדיר פונקציה $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ באופן הבא: $f(x) = \sum_{i=1}^n d(x, z_i)$.
(א) (15 נקודות) הוכיחו כי פונקציה $f(x)$ מקיימת תכונת ליפשיץ, כלומר יש קבוע $C > 0$ כך שלכל שתי נקודות $x, y \in X$ מתקיים $|f(x) - f(y)| \leq C d(x, y)$.

(ב) (10 נקודות) הוכיחו כי קיימת נקודה $x^* \in A$ כך ש- $f(x^*) = \min\{f(x) : x \in A\}$.

שאלה 3 (א) (25 נקודות) יהי (X, \mathcal{B}, p) מרחב מידה הסתברותית כלשהו ו- n מספר טבעי.

נניח כי $A_i \in \mathcal{B}$ לכל $i = 1, 2, \dots, n$ ומתקיים $\sum_{i=1}^n p(A_i) > n - 1$. האם יתכן ש- $p(\bigcap_{i=1}^n A_i) = 0$?
(ב) (10 נקודות - בנוס) תנו דוגמה של מרחב מידה $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ כך ש- $|X| = 2^{*0}$ ולכל $A \subset X$ מתקיים $\mu(A) = 0$ או $\mu(A) = 1$.

שאלה 4 לכל קטע $[a, b]$ הפונקציה $\varphi_{[a,b]}(x) : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ מוגדרת כך שצורתו של הגרף שלה היא שתי צלעות של משולש

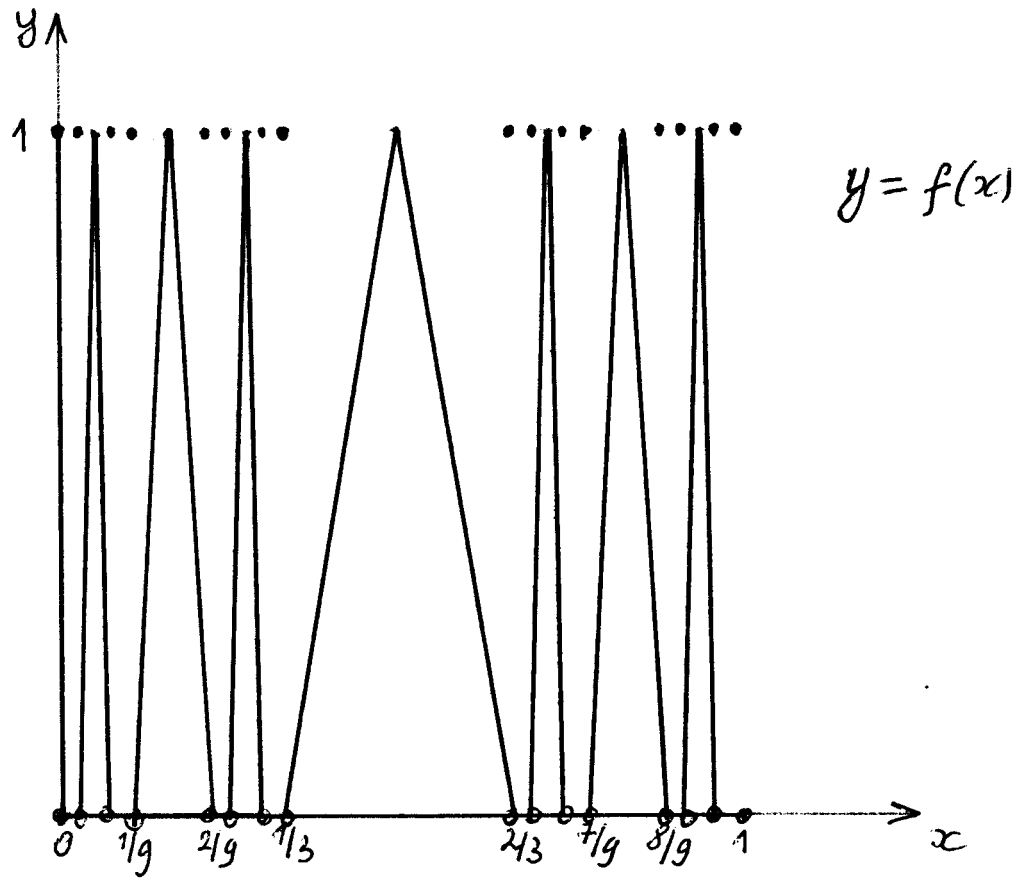


כאשר $A(a, 0), B(b, 0), C(\frac{a+b}{2}, 1)$ הן 3 נקודות במישור \mathbb{R}^2 .

תהי $K \subset [0, 1]$ קבוצת קנטור טרנרית סטנדרטית. אז $[0, 1] \setminus K = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$ כאשר כל הקטעים (a_i, b_i) הם זרים. נגדיר פונקציה $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ על ידי נוסחה הבאה:
 $f(x) = 1$ אם $x \in K$; $f(x) = \varphi_{[a_i, b_i]}(x)$ אם $x \in (a_i, b_i) \subset [0, 1]$. סקיצה של גרף בדף המצורף הבא.
(א) (15 נקודות) האם פונקציה $f(x)$ אינטגרבילית לפי רימן בקטע $[0, 1]$?

(ב) (10 נקודות) אם התשובה היא חיובית אז מהו הערך של אינטגרל $\int_{[0,1]} f(x) dx$ לפי רימן?

בהצלחה!



17.07.2025