

בחינה בקורס יסודות האנליזה להנדסת חשמל 1, תאריך 22.08.2025, מועד ב'
מספר הקורס: 201-2-5331
המרצה: פרופ' ארקדי ליידרמן

- משך הבחינה: 3 שעות
- יש לענות על כל 4 שאלות. סך הניקוד שניתן לצבור במבחן הינו 110, אבל הציון המירבי במבחן הינו 100.
- יש לנמק ולהוכיח את כל טענותיכם!
- חומר עזר המותר: כל נבחן רשאי להביא 2 דפי רשימות בגודל סטנדרטי A4. אין מחשבון.
- בכל שאלה/סעיף (פרט לסעיף הבנוס 3) ניתן לכתוב "לא יודע/ לא יודעת" ולקבל 20% מהנקודות.
- שאלות/סעיפים בהם כתבתם "לא יודע/ לא יודעת" לא ייבדקו.

שאלה 1 (25 נקודות) נסמן על ידי $C[a, b]$ אוסף של פונקציות ממשיות ורציפות בקטע $[a, b]$.
מהי העוצמה של קבוצה $C[a, b]$?

שאלה 2 (25 נקודות) בקבוצה $C[a, b]$ נגדיר נורמה $\|f\| = \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$. האם כדור סגור היחידה במרחב נורמי $C[a, b]$ הוא קבוצה קומפקטית?

שאלה 3

תהי $E \subset [a, b]$ קבוצה מדידת Lebesgue כלשהי. μ מסמן מידת Lebesgue ב- R .

(א) (25 נקודות) לכל $0 \leq x \leq \frac{b-a}{2}$ נגדיר קבוצה $E_x = E \cap [a+x, b-x]$.

הוכיחו כי לכל מספר $0 \leq c \leq 1$ קיים x כך ש- $\mu(E_x) = c\mu(E)$.

(ב) (10 נקודות -בנוס) הוכיחו כי קיימת קבוצה קומפקטית K כך ש- $K \subset E$ ו- $\mu(K) = \frac{1}{2}\mu(E)$.

שאלה 4

תהי $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של תתי-קבוצות קומפקטיות ובתי-מניה של קטע $[a, b]$.

נגדיר פונקציות $f_n : [a, b] \rightarrow R$ באופן הבא: אם $x \in A_n$ אז $f_n(x) = 1$, אחרת $f_n(x) = 0$.

(א) (10 נקודות) הוכיחו כי כל פונקציה $f_n(x)$ אינטגרבילית לפי Riemann בקטע $[a, b]$.

(ב) (15 נקודות) נניח כי $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ לכל $x \in [a, b]$.

האם פונקציה $f(x)$ בהכרח אינטגרבילית לפי Riemann בקטע $[a, b]$?

אם התשובה היא "כן" מהו הערך של אינטגרל Riemann $\int_{[a, b]} f(x) dx$?

האם פונקציה $f(x)$ בהכרח אינטגרבילית לפי Lebesgue בקטע $[a, b]$?

אם התשובה היא "כן" מהו הערך של אינטגרל Lebesgue $\int_{[a, b]} f(x) d\mu$? יש לנמק תשובתכם.

בהצלחה!