

יסודות פאנע'סיה עברית השנה 1.

אירקט ע"פ רמון

עבודת בית 1

אסעי 1 תהי A קבוצה אי-סופית כשלי. הוכיחו כי עכס קבוצה

הג-מנ'ה B מתקיים שוויון $|A| = |A \cup B|$

אסעי 2 מצא נוסחה עבור פונקציה $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ חפ-חפ ערכית ועס. האם אפשר למצוא פונקציה כזאת רצ'נה?

אסעי 3 עכס קבוצה $A \subset \mathbb{R}$ ועכס מספר $r \in \mathbb{R}$ שצ'ר קבוצה

$A+r = \{x+r : x \in A\} \subset \mathbb{R}$

תהי $A \subset \mathbb{R}$ קבוצה הג-מנ'ה. הוכיחו כי קיים מספר $r \in \mathbb{R}$ כך ש?

$A \cap (A+r) = \emptyset$

אסעי 4 תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה העשר תכונה הבאה:

$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq 1$ עכס קבוצה סופת $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq A$.

הוכיחו כי A קבוצה סופת או הג-מנ'ה.

אסעי 5 תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית. נסמן עס יצ' A

קבוצה עס כס תקופת אי-רצ'ות עסה. הוכיחו כי קבוצה A ביאו קבוצה הג-מנ'ה או סופת.

רמס: מהו סוג אי-רצ'ות וכוס עכ'ה עבור תקופת אי-רצ'ות

עס פונקציה מונוטונית?

אסעי 6 נסמן עס יצ' $C[a,b]$ אוסף עס פונקציות ממשיות רצ'ות שמוצרות עס קאע $[a,b]$. מה' העוצמה עס $C[a,b]$?

אסעי 7 תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה עכא הג-מנ'ה. הוכיחו כי קיים $t \in \mathbb{R}$

כך שקבוצות $A \cap (-\infty, t)$ ו $A \cap (t, \infty)$ הן עכא הג-מנ'ה שר"ק.

אסעי 8 יב' (X, d) מרחק מכלי כשלי. הוכיחו כי עכס

3 תקופות $x, y, z \in X$ מתקיים אי-שוויון

$d(x, y) \geq |d(x, z) - d(z, y)|$

אדעק 9 רבי E קמוצת סובל. נסמן קמוצת חזקה $X = \mathcal{P}(E)$
 דבס שר' קמוצת $A, B \in \mathcal{P}(E)$ נש'ר $d(A, B) = |A \Delta B|$
 (כמו-ה'ק'ל-ה'כ'ר'ל ס'מ'ל' $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$)
 כוכ'לו ל' (X, d) זו מרחק מ'ל.

אדעק 10 הקמוצת N של מספרים הטבעיים נש'ר
 $d(m, n) = \frac{|m-n|}{mn}$. האם d היא מרחק?
 ?

אדעק 11 רבי (X, d) מרחק מ'ל כש'לו. מצאו אם כן בקו'ים
 במחש'ים C כך? (a) $C \cdot d$ היא מרחק נ' X;
 (b) $C + d$ היא מרחק נ' X.

אדעק 12 נ'ה ל' d_1, d_2 בין שני מרחקים באותה קמוצת X.
 האם הבדלה בנוסחה הבאה מש'רה זק מרחק נ' X:
 (a) $d_1 + d_2$; (b) $\max\{d_1, d_2\}$; (c) $\min\{d_1, d_2\}$?

אדעק 13 רבי (X, d) מרחק מ'ל כש'לו.
 נ'ה ל' סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ ש'קו'ה $x \in X$
 ש' מרחק d. כוכ'לו ל' $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y) = d(x, y)$ ש'כ' דבס $y \in X$.

אדעק 14 הש'רה: קמוצת X $B(p_0, r) = \{p \in X : d(p_0, p) < r\}$
 $\bar{B}(p_0, r) = \{p \in X : d(p_0, p) \leq r\}$ נקרא- כעור (כעור סגור, בקומחה)
 עם ר'פ'וס סגור במרחק מ'ל (X, d) .

רבי (X, d) מרחק מ'ל כש'לו. נ'ה ש'ג'ר ש'ל כעור'ים
 מ'ק'ים $B(p_1, r_1) \subseteq B(p_2, r_2)$. האם ש'ו ש'רה הבדלה $r_1 \leq r_2$?

אדעק 15 נ'הו'ן הש'ל מרחקו במרחק \mathbb{R}^3 : אוק $P_i(x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3$

$$d_1(P_1, P_2) = |z_2 - z_1| + |y_2 - y_1| + |x_2 - x_1|$$

$$d_2(P_1, P_2) = \max\{|z_2 - z_1|, |y_2 - y_1|, |x_2 - x_1|\}$$

מ'ה' ה'צ'רה ה'ש'או'מ'ל' של כעור'ים $\bar{B}(p_0, 1), B(p_0, 1)$
 במרחק'ים מרחק (\mathbb{R}^3, d_1) ; (\mathbb{R}^3, d_2) כאוק $p_0 = (0, 0, 0)$?