עבודת בית 1.

פתרונות קצרים של שאלות אי-זוגיות.

<u>שאלה 1</u> A קבוצה אינסופית, לכן יש לה תת-קבוצה בת-מניה $B_0 \subset A$. לפי הנתון גם B קבוצה בת-מניה, לכן איחוד $B_0 \cup B$ גם קבוצה בת-מניה. נסמן $\varphi_0 : B_0 \cup B \xrightarrow[1-1]{\text{על}} B$.

אז נגדיר $\varphi : A \cup B \to A$ באופן הבא:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_0(x), & x \in B_0 \cup B \text{ אם} \\ x, & \text{אחרת} \end{cases}$$

אז העתקה φ היא 1-1 ועל, מ"ש

$$\boxed{|A \cup B| = |A|}$$

שאלה 3:

נניח בשלילה כי לכל $r \in \mathbb{R}$ מתקיים $A \cap (A + r) \neq \emptyset$. מכיוון ש-$A \cap (A + r) \neq \emptyset$, לכל r קיימים $a, b \in A$ כך ש-$a = b + r$. כלומר, $r = a - b$. נתבונן בהעתקה הבאה:

$$\phi : A \times A \to \mathbb{R}$$

המוגדרת ע"י $\phi(a, b) = a - b$. מהנחת השלילה זאת פונקציה על, ולכן $|\mathbb{R}| \leq |A \times A|$. אולם, מתקיים $|A \times A| = \aleph_0$ ולכן $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c} \leq \aleph_0$, סתירה.

שאלה 5:

<u>סקיצת הוכחה:</u> ההוכחה מחולקת ל-2 שלבים:

1. (להעזר ברמז) להראות שממונוטוניות f לא יתכנו נקודות אי רציפות שאינן מהסוג הראשון ("קפיצה")
2. נעזר בעובדה הנ"ל וצפיפות הרציונליים על מנת לבנות העתקה מנקודות אי הרציפות של f לתת-קבוצה של $\mathbb{Q}$ באמצעות בניית סדרה (אולי אינסופית) המתאימה את ערכי x בהן יש קפיצה למספר רציונלי כלשהו. מכאן מספר נקודות אי הרציפות הוא לכל היותר העוצמה של $\mathbb{Q}$, היא $\aleph_0$.

<u>הוכחה:</u> באי הגבלת הכלליות, f עולה (אחרת נגדיר $g = -f$ עולה). המקרה עבור f קבועה טריוויאלי.
תחילה, נבדוק איזה סוגי אי רציפות אפשריים עבור f:

1. **סליקה** – נניח בשלילה שקיימת נקודת אי רציפות סליקה ב-$x = x_0$. במצב זה, ישנם 2 מקרים עבור $\epsilon > 0$ קטן מספיק:
   a. $f(x_0) > f(x_0 - \epsilon), f(x_0 + \epsilon)$
   b. $f(x_0) < f(x_0 - \epsilon), f(x_0 + \epsilon)$

   בשני המקרים f איננה מונוטונית - סתירה.
2. **סוג שני** – נניח בשלילה שקיימת נקודת אי רציפות מסוג שני ב-$x = x_0$. כלומר, לפחות אחד מהגבולות $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ או $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ איננו קיים. באי הגבלת הכלליות, הגבול $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ לא קיים.
   תהא $x_n \to x_0$ (מהכיוון השלילי). נסמן: $M = \limsup\limits_{n \to \infty} f(x_n)$ ובאופן דומה נסמן $m = \liminf\limits_{n \to \infty} f(x_n)$.
   מכיוון שהגבול $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$ לא קיים, $M > m$. ניקח 2 תתי-סדרות של x_n, $y_n = \{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ ו-$z_n = \left\{x_{n_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ כך ש-$\lim\limits_{n \to \infty} f(y_n) = M$ ו-$\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = m$. מההתכנסות שלהן נסיק כי קיימים $n_1 < n_2 < n_3$ כך ש-$f(z_{n_1}), f(z_{n_3}) < f(y_{n_2})$. כלומר f איננה מונוטונית - סתירה.

שאלה 5 – המשך)

לכן בהכרח נקודות אי הרציפות של f הן מהסוג הראשון. נסמן את כל נקודות אי הרציפות של f בקבוצה $DisCo(f)$. אם $DisCo(f)=\emptyset$, אז הטענה נכונה. אחרת, קיים $d_1\in DisCo(f)$ כך ש-$f(d_1^-)\neq f(d_1^+)$. נסמן $m_1=\min\{f(d_1^-),f(d_1^+)\}$ ו-$M_1=\max\{f(d_1^-),f(d_1^+)\}$. נשים לב ש-$m_1<M_1$ ולכן, מצפיפות הרציונליים, קיים $q_1\in(m_1,M_1)\cap\mathbb{Q}$. את q_1 נכניס לקבוצה Q.

נתבונן בקבוצה $DisCo(f)\setminus\{d_1\}$ אם היא ריקה סיימנו והטענה נכונה. אחרת, נחזור על התהליך עבור כלשהו $d_2\in DisCo(f)\setminus\{d_1\}$ ונמצא עבורו $q_2\in(m_2,M_2)\cap\mathbb{Q}$ כך ש-$q_2\notin Q$ (m_2 ו-M_2 מוגדרים בדומה למקודם והקיום של q_2 נתון ע"י צפיפות הרציונליים).

ישנם 2 מקרים אפשריים להמשך התהליך המתואר בהתאם למספר נקודות אי הרציפות:

1. התהליך יסתיים כי מספר נקודות אי הרציפות של f סופי. לכן בהכרח $|DisCo(f)|\le\aleph_0$.
2. התהליך לא יסתיים כי ל-f אינסוף נקודות אי רציפות. באמצעות הבנייה הנ"ל, ניתן לבנות פונקציה
$$\phi: DisCo(f)\to Q\subset\mathbb{Q}$$
המוגדרת ע"י $\phi(d_i)=q_i$. מאופן הבניה של Q, זאת העתקה חח"ע ועל ולכן:
$$|DisCo(f)|=|Q|\le|\mathbb{Q}|=\aleph_0$$

בשני המקרים $|DisCo(f)|\le\aleph_0$, ולכן מספר נקודות אי הרציפות של f הוא לכל היותר בר-מניה.

שאלה 7 בדרך השלילה נניח כי $A\cap(-\infty,t)$ או $A\cap(t,\infty)$ קבוצה בת-מניה לכל $t\in\mathbb{R}$. מכאן ש A קבוצה לא בת-מניה אך רק קבוצה אחת מאלה היא בת-מניה. לכל $q\in\mathbb{Q}$ רציונלי נסמן על ידי A_q קבוצה $A\cap(q,\infty)$ אם היא בת-מניה או $A\cap(-\infty,q)$ אחרת והיא בת-מניה. נתבונן בקבוצה $A\setminus\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}A_q$. $|A|>\aleph_0$ ו $|\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}A_q|=\aleph_0$ ולכן $A\setminus\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}A_q\neq\emptyset$. תהי $y\in A\setminus\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}A_q$ כלשהו. אז מתקיים כי

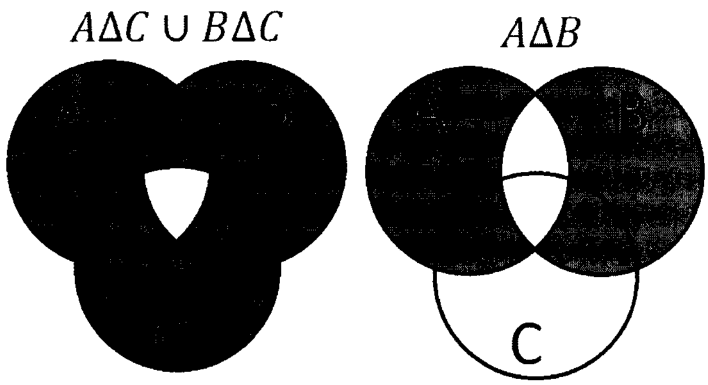
$$A=\Big(\bigcup_{q<y}\big(A\cap(-\infty,q)\big)\Big)\cup\{y\}\cup\Big(\bigcup_{q>y}\big(A\cap(q,\infty)\big)\Big)$$

מאחר שלכל $y\in\mathbb{R}$ יש סדרה של מספרים רציונליים $q_n\nearrow y$ ויש סדרה של מספרים רציונליים $q_n\searrow y$. מקבלים כי סתירה, $A\setminus\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}A_q=\{y\}$ ולכן $|A|=\aleph_0$.

שאלה 9:

נבדוק האם האקסיומות של מטריקה מתקיימות לכל $A, B \in X = \mathcal{P}(E)$, כאשר E קבוצה סופית, עבור הפונקציה $d(A,B) = |A\Delta B|$:

1. **אי-שליליות** – הפונקציה מוגדרת כעוצמה של קבוצות סופיות ולכן היא אי שלילית.
2. **מרחק עצמי 0** – אם $A = B$ אז מהגדרת הפרש סימטרי, $d(A,B) = 0$. אם $d(A,B) = 0$ אז בהכרח $A = B$ (אחרת או ש-$B\backslash A \neq \emptyset$ או ש-$A\backslash B \neq \emptyset$. בפרט $A\Delta B \neq \emptyset$ ו-$d(A,B) > 0$).
3. **סימטריה** – $d(A,B) = |(A\backslash B) \cup (B\backslash A)| = |(B\backslash A) \cup (A\backslash B)| = d(B,A)$
4. **אי שוויון המשולש** – נתבונן בדיאגרמות וון הבאות:



כלומר, $(A\Delta C) \cup (B\Delta C) = (A\Delta B) \cup [(C\backslash A) \cup (C\backslash B)]$. מכיוון שכל הקבוצות סופיות, מתקיים $|A| + |B| \geq |A \cup B| \geq |A|$. כלומר, $|(A\Delta B) \cup [(C\backslash A) \cup (C\backslash B)]| \geq |A\Delta B| = d(A,B)$ וגם מתקיים $d(A,C) + d(B,C) = |A\Delta C| + |B\Delta C| \geq |(A\Delta C) \cup (B\Delta C)|$. סה"כ:

$$d(A,C) + d(C,B) = |A\Delta C| + |C\Delta B| \geq |A\Delta B| = d(A,B)$$

כל האקסיומות מתקיימות ולכן $d(A,B)$ היא מטריקה על X.

שאלה 11:

א. **אי-שליליות** – על מנת שתתקיים עבור $d' = C \cdot d$ נקבל אילוץ $\boldsymbol{C \geq 0}$.
מרחק עצמי 0 – $d'(x,y) = 0 \Leftrightarrow C \cdot d(x,y) = 0$. על מנת שיתקיים רק עבור $x = y$ נקבל את האילוץ $\boldsymbol{C \neq 0}$.
סימטריה – $d'(x,y) = d'(y,x) \Leftrightarrow C \cdot d(x,y) = C \cdot d(y,x)$ מתקיים לכל C.
אי שוויון המשולש – לכל $x,y,z \in X$:
$d'(x,y) + d'(y,z) \geq d'(x,z) \Leftrightarrow C \cdot d(x,y) + C \cdot d(y,z) \geq C \cdot d(x,z)$ נקבל אילוץ $\boldsymbol{C \geq 0}$.
נאחד את האילוצים ונקבל ש $d' = C \cdot d$ מטריקה לכל $C > 0$.

ב. **אי-שליליות** – על מנת שתתקיים עבור $d' = C + d$ נקבל אילוץ $\boldsymbol{C \geq -d(x,y)}$ לכל $\boldsymbol{x,y \in X}$.
מרחק עצמי 0 – $d'(x,x) = 0 \Leftrightarrow C + d(x,x) = 0 \Leftrightarrow C = 0$ קיבלנו אילוץ $\boldsymbol{C = 0}$.
סימטריה – $d'(x,y) = d'(y,x) \Leftrightarrow C + d(x,y) = C + d(y,x)$ מתקיים לכל C.
אי שוויון המשולש – לכל $x,y,z \in X$:
$d'(x,y) + d'(y,z) \geq d'(x,z) \Leftrightarrow C + d(x,y) + C + d(y,z) \geq C + d(x,z)$ מתקיים לכל C.
נאחד את האילוצים ונקבל ש $d' = C + d$ מטריקה רק עבור $C = 0$.

שאלה 13 נתון כי $d(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

על פי תוצאה של שאלה 8,

$$|d(x_n,y) - d(x,y)| \leq d(x_n,x)$$

לכן על פי משפט "סנדוויץ'" $|d(x_n,y) - d(x,y)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

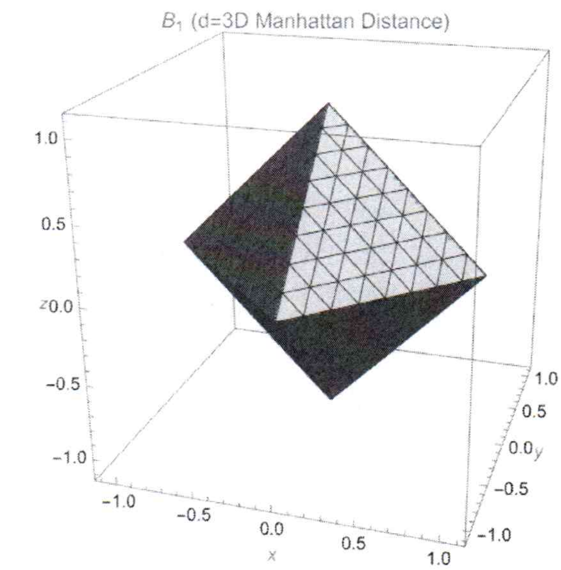
כלומר $d(x_n,y) \xrightarrow[n\to\infty]{} d(x,y)$.

שאלה 15:

נכתוב במפורש את הכדורים השונים:

$$B_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| + |z| \le 1\}$$

זהו יהלום (מלא) ב-$\mathbb{R}^3$:



$$B_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \max\{|x|, |y|, |z|\} \le 1\}$$

זוהי קובייה (מלאה) ב-$\mathbb{R}^3$: