עבודת בית 2.

שאלה 1 נתבונן בקבוצה במישור
$$A = \{ (x, \sin(\tfrac{1}{x})) : x>0 \} \subset \mathbb{R}^2$$
מהו הסגור clA של A ב $\mathbb{R}^2$?

שאלה 2 תהי $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה.
(a) הוכיחו כי אם $f(x)$ רציפה בכל נקודה אזי גרף של פונקציה $\Gamma = \{ (x, f(x)) : x \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^2$ היא קבוצה סגורה ב $\mathbb{R}^2$.
(b) האם גם ההפך נכון: אם Γ קבוצה סגורה ב $\mathbb{R}^2$ אזי $f(x)$ פונקציה רציפה?

שאלה 3 יהי (X,d) מרחב מטרי ו $A \subset X$ קבוצה לא ריקה. נגדיר מספר $\rho(x,A) = \inf\{ d(x,y) : y \in A \}$ לכל $x \in X$.
הוכיחו כי $cl(A) = \{ x \in X : \rho(x,A) = 0 \}$ (סגור ב X).

שאלה 4 מרחב מטרי (X,d) נקרא ספרבילי אם קיימת קבוצה $A \subseteq X$ בת-מנייה כך ש $cl(A) = X$. משפחה של קבוצות פתוחות $B = \{U_\alpha\}$, $U_\alpha \subseteq X$ נקראת בסיס עבור X אם לכל נקודה $x \in X$ ולכל קבוצה פתוחה V $x \in V$ יש קבוצה $U_\alpha \in B$ כך ש $x \in U_\alpha \subseteq V$.
(א) הוכיחו כי כל מרחב אוקלידי $\mathbb{R}^n$ ספרבילי.
(ב) הוכיחו כי מרחב מטרי (X,d) ספרבילי אם ורק אם יש לו בסיס בן-מנייה.

שאלה 5 ב $X = \mathbb{R}$ נגדיר $d(x,y) = |\mathrm{arctg}\,x - \mathrm{arctg}\,y|$ לכל $x,y \in X$.
(a) הוכיחו כי d מגדירה מטריקה ב X.
(b) האם (X,d) מרחב מטרי שלם?

שאלה 6 יהי $C[-1,1]$ מרחב של פונקציות רציפות עם מטריקה
$$d(f,g) = \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|\, dx .$$
נתבונן בסדרה $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ אם
$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\frac{1}{n}, 1] \\ nx, & x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ -1, & x \in [-1, -\frac{1}{n}] \end{cases}$$
הוכיחו כי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי. האם מטריקה d שלמה?

שאלה 7 יהיו (X,d_X) ; (Y,d_Y) שני מרחבים מטריים.

(a) נניח כי $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ מקיימת תנאי Lipshitz:

$$\exists K>0 \quad \forall x_1,x_2\in X \quad d_Y(f(x_1),f(x_2))\le K\, d_X(x_1,x_2)$$

הוכיחו כי f העתקה רציפה במידה שווה ב X.

(b) נקבע נקודה $p\in X$ ונגדיר פונקציה $f:X\to\mathbb{R}$ על ידי הנוסחה $f(x)=d_X(x,p)$. הוכיחו כי $f(x)$ פונקציה רציפה במידה שווה על מרחב מטרי (X,d_X)

שאלה 8 במרחב $C[0,1]$ נתבונן בכדור סגור:

$$\bar{B}=\{f:\ \max_{x\in[0,1]}|f(x)|\le 1\}.$$

האם $\bar{B}$ קבוצה קומפקטית?

שאלה 9 הוכיחו כי אם (X,d) מרחב מטרי קומפקטי אזי d מטריקה שלמה.

שאלה 10 יהיו (X,d_X) ; (Y,d_Y) שני מרחבים מטריים. נניח כי $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ פונקציה רציפה.

(a) הוכיחו כי אם $K\subset X$ קבוצה קומפקטית אזי גם תמונתה $f(K)\subset Y$ קבוצה קומפקטית.

(b) נתבונן במקרה שבו (X,d_X) לו מרחב אוקלידי $\mathbb{R}^n$. הוכיחו כי אם $A\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה חסומה אז גם תמונתה $f(A)\subset Y$ קבוצה חסומה.

שאלה 11 תהי $f:(X,d)\longrightarrow\mathbb{R}$ פונקציה רציפה מוגדרת במרחב מטרי (X,d). הוכחו כי לכל $c\in\mathbb{R}$ קבוצה $A_c(f)=\{x\in X: f(x)\geqslant c\}$ סגורה וקבוצה $D_c(f)=\{x\in X: f(x)>c\}$ פתוחה.

שאלה 12 תהי $f:(X,d)\longrightarrow\mathbb{R}$ פונקציה מוגדרת במרחב מטרי (X,d). נניח כי קבוצות $A_c(f)=\{x\in X: f(x)\geqslant c\}$ ו $B_c(f)=\{x\in X: f(x)\leq c\}$ סגורות לכל $c\in\mathbb{R}$. הוכיחו כי פונקציה f רציפה ב X.

שאלה 13 הגדרה: יהי (X,d) מרחב מטרי. קבוצה $A\subseteq X$ נקראת G_δ כאשר $A=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ וכל U_n קבוצה פתוחה ב X.
$A\subseteq X$ נקראת F_σ כאשר $A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ וכל F_n קבוצה סגורה ב X.
הוכיחו כי כל קבוצה סגורה ב X היא G_δ, וכל קבוצה פתוחה ב X היא F_σ.

שאלה 14 הוכיחו כי קבוצה $\mathbb{Q}$ של מספרים רציונליים היא לא קבוצת G_δ ב $\mathbb{R}$.
רמז: תשתמשו במשפט Baire על קטגוריות.

שאלה 15 תבנו קבוצה ב $\mathbb{R}$ כזאת שלא G_δ ולא F_σ ב $\mathbb{R}$.