עבודת בית 3

שאלה 1 נניח כי $\{\mathcal{B}_\alpha : \alpha \in A\}$ אוסף כלשהו של σ-אלגברות באותה קבוצה $X \neq \emptyset$. הוכיחו כי חיתוך $\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{B}_\alpha$ הוא גם σ-אלגברה ב X.

שאלה 2 תהי X קבוצה כלשהי עם עוצמה גדולה מ $\aleph_0$. נגדיר משפחה של תת-קבוצות

$$\mathcal{F} = \{ A \subset X : \ |A| \le \aleph_0 \ \text{או} \ |X \setminus A| \le \aleph_0 \}$$

ונגדיר

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & |X \setminus A| \le \aleph_0 \ \text{אם} \\ 0, & |A| \le \aleph_0 \ \text{אם} \end{cases}$$

הוכיחו כי $(X, \mathcal{F}, \mu)$ זו מרחב מידה.

שאלה 3 תנו דוגמה של קבוצה $X \neq \emptyset$ כך ש μ שמוגדרת על ידי:

$$\mu(A) = \begin{cases} \infty, & |A| \ge \aleph_0 \ \text{אם} \\ 0, & |A| < \aleph_0 \ \text{אם} \end{cases}$$

היא לא מידה על $(X, \mathcal{P}(X))$.

שאלה 4 תהי $X \neq \emptyset$ קבוצה כלשהי. נקבע נקודה $p \in X$ אחת. נגדיר μ על σ-אלגברה $\mathcal{P}(X)$ באופן הבא:

אם $p \in A$ $\mu(A) = 1$; אם $p \notin A$ $\mu(A) = 0$.

הוכיחו כי $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ זו מרחב מידה.

הערה: μ כזאת נקראת מידה אטומית.

שאלה 5 יהי $(X, \mathcal{B}, \mu)$ מרחב מידה כלשהו. נניח כי $A_i \in \mathcal{B}$ לכל $i = 1, 2, 3, \dots$.

(a) הוכיחו כי אם $A_i \subseteq A_{i+1}$ לכל i אז $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$.

(b) הוכיחו כי אם $A_i \supseteq A_{i+1}$ לכל i ! $\mu(A_1) < \infty$ אז $\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$.

האם נכונה (b) בלי ההנחה $\mu(A_1) < \infty$?

שאלה 6 יהי $X \neq \emptyset$ קבוצה, $\mathcal{B}$ σ-אלגברה של תתי-קבוצות של X ו- $\varphi : \mathcal{B} \to [0,\infty)$ פונקציה אדיטיבית, כלומר
$B_1 \cap B_2 = \emptyset \Rightarrow \varphi(B_1 \cup B_2) = \varphi(B_1) + \varphi(B_2)$, $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$.
הוכיחו כי φ היא מידה על $\mathcal{B}$, כלומר φ σ-אדיטיבית
אם ורק אם מתקיים התנאי הבא:
אם $A_i \in \mathcal{B}$ ו- $A_i \supseteq A_{i+1}$ לכל i ו- $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$
אז $\lim_{n\to\infty} \varphi(A_n) = 0$.

שאלה 7 יהי $(X, \mathcal{B}, \mu)$ מרחב מידה ו- $\mu(X) < \infty$.
נניח כי $\{A_r : r \in (0,1]\}$ זו משפחה של קבוצות מדידות
כך ש- $A_r \subseteq A_s$ עבור $r \le s$.
הוכיחו כי חיתוך $A = \bigcap_{r>0} A_r$ זו קבוצה מדידה ו-
$\mu(A) = \lim_{r\to 0} \mu(A_r)$.

שאלה 8 נסמן על ידי $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ σ-אלגברה של קבוצות Borel.
לכל משפחה $\mathcal{K}$ של תתי-קבוצות של $\mathbb{R}$ נסמן על ידי
$\sigma(\mathcal{K})$ σ-אלגברה מינימלית שמכילה $\mathcal{K}$.
הוכיחו כי $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{K}_1) = \sigma(\mathcal{K}_2) = \sigma(\mathcal{K}_3)$
כאשר $\mathcal{K}_1$ – אוסף של קטעים פתוחים (a,b) ב- $\mathbb{R}$
$\mathcal{K}_2$ – אוסף של קטעים סגורים $[a,b]$ ב- $\mathbb{R}$
$\mathcal{K}_3$ – אוסף של קטעים בצורה $[a,b)$ ב- $\mathbb{R}$.

שאלה 9 נסמן על ידי μ מידת Lebesgue ב- $\mathbb{R}$.
(a) תנו דוגמה של קבוצה פתוחה $A \subset \mathbb{R}$ כך ש-
A לא חסומה ו- $\mu(A) = 1$.
(b) תנו דוגמה של קבוצה קומפקטית $A \subset \mathbb{R}$ כך ש-
$|A| = 2^{\aleph_0}$ ו- $\mu(A) = 0$.

(c) תנו דוגמה של קבוצה קומפקטית $A \subset \mathbb{R}$ כך ש: $|A| = 2^{\aleph_0}$, A לא מכילה אף קטע ו $\mu(A) > 0$.

<u>שאלה 10</u> נסמן ע"י μ מידת Lebesgue ב $\mathbb{R}$.
הוכחו כי תנאים הבאים שקולים:

(a) $A \subset \mathbb{R}$ קבוצה מדידה לפי Lebesgue

(b) לכל $\varepsilon > 0$ קיימת קבוצה פתוחה $A \subset U$ כך ש $\mu(U \setminus A) < \varepsilon$

(c) לכל $\varepsilon > 0$ קיימת קבוצה סגורה $F \subset A$ כך ש $\mu(A \setminus F) < \varepsilon$

<u>שאלה 11</u> נסמן ע"י μ מידת Lebesgue ב $\mathbb{R}$.
נזכיר כי קבוצה A נקראת G_δ אם $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ וכל U_n קבוצה פתוחה.
קבוצה A נקראת F_σ אם $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ וכל F_n קבוצה סגורה. הוכחו כי תנאים הבאים שקולים:

(a) $A \subset \mathbb{R}$ מדידה לפי Lebesgue

(b) $A = G \setminus M$, כאשר G היא קבוצה G_δ ו $\mu(M) = 0$

(c) $A = F \cup M$, כאשר F היא קבוצה F_σ ו $\mu(M) = 0$

<u>שאלה 12</u> μ - מידת Lebesgue ב $\mathbb{R}$ ו $A \subset \mathbb{R}$ קבוצה מדידה לפי Lebesgue. נסמן $A + x = \{a + x : a \in A\} \subset \mathbb{R}$
הוכחו כי קבוצה $A + x$ גם מדידה ומתקיים $\mu(A) = \mu(A + x)$ לכל x.

שאלה 13 תהי $V\subset\mathbb{R}$ קבוצת Vitali
(אשר לא מדידה לפי Lebesgue).
נניח כי $A\subset V$ קבוצה מדידה לפי Lebesgue.
הוכיחו כי $\mu(A)=0$.

שאלה 14 יהי $(X,\mathcal{B},P)$ מרחב מידת הסתברות.

(a) $A_1,A_2\in\mathcal{B}$ ונניח כי $p(A_1)+p(A_2)>1$.
האם יתכן ? $\bigcap_{i=1}^{2}A_i=\emptyset$?

(b) $A_1,A_2,A_3\in\mathcal{B}$ ונניח כי $p(A_1)+p(A_2)+p(A_3)>2$.
האם יתכן ? $\bigcap_{i=1}^{3}A_i=\emptyset$?

שאלה 15 תהי $A\subset[-1,1]$ קבוצה מדידה לפי Lebesgue עם $\mu(A)>1$.
הוכיחו כי נקודה $t=1$ שייכת לקבוצה $A-A$.
רמז: תסתכלו בקבוצות
$A_0=A\cap[-1,0]$, $A_1=A\cap[0,1]$, $A_2=A_0+1$