עבודת בית 4

שאלה 1 תהי $\mathcal{F}$ σ-אלגברה של תתי-קבוצות של $\mathbb{R}$ הבאה: $\mathcal{F}=\{\emptyset,(-\infty,0],(0,\infty),(-\infty,\infty)\}$. יש לתאר את כל הפונקציות המדידות $f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

שאלה 2 יהיו $X\neq\emptyset$ ו-$\mathcal{F}$ σ-אלגברה של תתי-קבוצות של X. הוכיחו כי פונקציה $f(x):X\to\mathbb{R}$ מדידה אם ורק אם $f^{-1}(-\infty,q)\in\mathcal{F}$ לכל מספר רציונלי $q\in\mathbb{Q}$.

שאלה 3 יהיו $X\neq\emptyset$ ו-$\mathcal{F}$ σ-אלגברה של תתי-קבוצות של X. נניח כי $f(x):X\to\mathbb{R}$, $g(x):X\to\mathbb{R}$ הן שתי פונקציות מדידות. תהי $\varphi(x):\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה של שני משתנים ממשיים. הוכיחו כי פונקציה $h(x)=\varphi(f(x),g(x)):X\to\mathbb{R}$ מדידה.

שאלה 4 תהי $f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית. הוכיחו כי $f(x)$ היא פונקציה מדידה Borel, כלומר $f^{-1}(U)$ זו קבוצת Borel לכל קבוצת Borel $U\subset\mathbb{R}$.

שאלה 5 יהיו $X\neq\emptyset$ ו-$\mathcal{F}$ σ-אלגברה של תתי-קבוצות של X. נניח כי $f_n(x):X\to\mathbb{R}$ פונקציה מדידה לכל $n\in\mathbb{N}$. נסמן על ידי A קבוצה של $x\in X$ כך שקיים גבול סופי $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. הוכיחו כי A קבוצה מדידה, כלומר $A\in\mathcal{F}$.

שאלה 6 תהי $f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה מדידה. הוכיחו כי $f^{-1}(A)$ זו קבוצה מדידה Lebesgue לכל קבוצה מדידה Lebesgue A אם מידה של $f^{-1}(N)$ שווה לאפס כאשר מידת N שווה לאפס.

שאלה 7 תהי $f(x):[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה מדידה Lebesgue.
נניח כי $\int_{[a,c]} f(x)\,d\mu=0$ לכל $c\in[a,b]$. הוכיחו כי
$f(x)\sim 0$, ז"א אם $A=\{x\in X: f(x)\neq 0\}$ אז $\mu(A)=0$.

שאלה 8 תהי $E\subset\mathbb{R}$ קבוצה מדידה Lebesgue ו-$\mu(E)<\infty$.
נניח כי $f(x):E\to\mathbb{R}$ פונקציה מדידה.
הוכיחו, כי קיימת פונקציה מדידה $\varphi(x):E\to\mathbb{R}$ כך ש:
$\varphi(x)>0$ לכל $x\in E$ ו-
$\int \varphi(x) f(x)\,d\mu<\infty$.

שאלה 9 תהי $E\subset\mathbb{R}$ קבוצה מדידה Lebesgue ו-$\mu(E)<\infty$.
נניח כי $f(x):E\to\mathbb{R}$ פונקציה מדידה.
לכל שלם טבעי נגדיר $B_n=\{n\le|f|<n+1\}$. הוכיחו שקילות של
(a) $\int_E |f|\,d\mu<\infty$; (b) $\sum_{n\ge 0} n\,\mu(B_n)<\infty$.

שאלה 10 תהי $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה מדידה Lebesgue ו-
$\int_{[0,1]} f(x)\,d\mu=C$. הוכיחו כי קיים $t\in[0,\frac{1}{2}]$ כך ש
$\int_{[t,t+\frac{1}{2}]} f(x)\,d\mu=\frac{1}{2}C$.

שאלה 11 יהיו $f_n(x):[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציות מדידות Lebesgue
לכל $n\in\mathbb{N}$. נניח כי $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ כמעט לכל $x\in[a,b]$.
(a) הוכיחו כי
$$\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]}\cos(f_n(x))\,d\mu=\int_{[a,b]}\cos(f(x))\,d\mu$$
(b) האם בהכרח
$$\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]} f_n(x)\,d\mu=\int_{[a,b]} f(x)\,d\mu \ ?$$

שאלה 12 תהי $f_n(x):[0,\infty)\to\mathbb{R}$ מוגדרת על ידי

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in[n, n+\frac{1}{n}]\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$$

לכל $n\in\mathbb{N}$

(a) הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$ לכל x.

(b) הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\int_{[0,\infty)} f_n(x)\,d\mu=0$

(c) אף על פי כן לא קיימת הפונקציה המשלטת $g(x)$, כלומר $g(x)\geq|f_n(x)|$ לכל x ו-n וכן $\int_{[0,\infty)} g(x)\,d\mu<\infty$.

שאלה 13 תהי $C\subset[0,1]$ קבוצת Cantor הטרנרית.
נגדיר פונקציה $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ באופן הבא:
אם $x\in C$ אזי $f(x)=x$;
לכל $x\notin C$, אם x שייך לקטע פתוח שמוסר ב $[0,1]\setminus C$ באורך $\frac{1}{3^n}$, אזי $f(x)=\frac{1}{2^n}$.
למשל $f|_{(\frac{1}{3},\frac{2}{3})}=\frac{1}{2}$; $f|_{(\frac{1}{9},\frac{2}{9})\cup(\frac{7}{9},\frac{8}{9})}=\frac{1}{4}$

(a) מצאו את הערך $\int_{[0,1]} f(x)\,d\mu$ במובן Lebesgue.

(b) האם $f(x)$ אינטגרבילית במובן Riemann?
אם כן אז מהו הערך $\int_0^1 f(x)\,dx$?

שאלה 14 תהי μ מידת Lebesgue ב $\mathbb{R}$.
נקבע קבוע $1 \leq p < \infty$. נסמן על ידי $L_p(E)$
מרחב לינארי של פונקציות מדידות $f(x): E \to \mathbb{R}$
כך ש $\int_E |f(x)|^p d\mu < \infty$. (נזכיר כי אנחנו מזהים
שתי פונקציות $f(x), g(x)$ כאשר $\mu\left(E(f \neq g)\right) = 0$).
הוכחו כי $L_p(E)$ זו מרחב נורמי עם
נורמה

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f(x)|^p d\mu\right)^{1/p}$$

שאלה 15 תהי $E \subset \mathbb{R}$ קבוצה מדידה Lebesgue
ש $0 < \mu(E) < \infty$.

(a) הוכחו כי אם $f(x) \in L_2(E)$ אז גם $f(x) \in L_1(E)$.

(b) נניח כי $[f(x)]^2$ פונקציה חסומה ואינטגרבילית
לפי Lebesgue.
האם מזה בהכרח נובע כי $f(x)$ גם
אינטגרבילית לפי Lebesgue?