

קורס: חדו"א 2 לתלמידי מדעי המחשב והנדסת תוכנה, תאריך 25.07.2024, מועד א'  
מספר הקורס: 201-1-2371, תוכנית אקדמיזציה לטייס  
מרצה: פרופ' ארקדי ליידרמן

- משך הבחינה: 2 שעות
- יש לענות על כל 4 שאלות, משקל של כל שאלה 25 נקודות.
- יש לנמק ולהוכיח את כל טענותיכם!
- אין להשתמש בחומר עזר פרט למחשבון פשוט ללא צג גרפי.
- בכל שאלה/סעיף ניתן לכתוב "לא יודעת" ולקבל 20% מהנקודות.
- שאלות/סעיפים בהם כתבתם "לא יודעת" לא ייבדקו.

### מספר הנבחן \_\_\_\_\_

**שאלה 1** (25 נקודות) תהי פונקציה  $f(x)$  מוגדרת בתחום  $\{1 \leq x\}$  ומקיימת תנאי  $f(x) \geq 0$ .

נתון כי אינטגרל הלא אמתי  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x + f(x)} dx$  מתכנס. הוכיחו כי פונקציה  $\frac{f(x)}{x}$  לא חסומה בתחום  $\{1 \leq x\}$ .

**שאלה 2** נתונה הפונקציה  $f(x, y) = e^{x-2y} - xe^{-y}$

(א) (10 נקודות) מצאו ומיינו את כל נקודות אקסטרומום מקומי של פונקציה במישור.

(ב) (15 נקודות) מצאו את הערך הכי וגדול ואת הערך הכי קטן של פונקציה בתחום

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2y; y \leq 2\}$$

**שאלה 3** (א) (10 נקודות) תהי  $f(t)$  פונקציה גזירה. נגדיר פונקציה  $z = x f(y^2 - x^2)$ . מצאו את הערך של ביטוי

$$\frac{1}{yz} \left( x^2 \frac{\partial z}{\partial y} + xy \frac{\partial z}{\partial x} \right) \text{ האם הערך זה תלוי ב- } x, y \text{ ?}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^\alpha \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{(ב) (15 נקודות) נתונה הפונקציה}$$

חקרו עבור איזה ערכים של  $\alpha$  הפונקציה  $f(x, y)$  דיפרנציאבילית בנקודה  $(0, 0)$ .

**שאלה 4** (25 נקודות) חשבו את אינטגרל הכפול  $\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$ ,

כאשר התחום מישורי  $D$  מוגדר על ידי התנאים הבאים:  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 2; 0 \leq y \leq x; x^2 + y^2 \geq 1\}$ .

בהצלחה!



$$g(x) = e^{x-4} x e^{-2}$$

$$g'(x) = e^{x-4} - e^{-2}, \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$0 \leq y \leq 2, \quad 2y - x = 0 \quad . P_2 P_4 \quad \gamma \subset \eta \quad (3)$$

$$g(y) = e^0 - 2y e^{-y}$$

$$g'(y) = 2y e^{-y} - 2e^{-y} = 2e^{-y}(y-1), \quad g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 1$$

$$P_5(2,1) \quad \text{מקסימום}$$

$$f(P_1) = -e^{-2}; \quad f(P_2) = 1; \quad f(P_3) = e^{-4}$$

$$f(P_4) = 1 - 4e^{-2}; \quad f(P_5) = 1 - 2e^{-1}$$

$$\max_{(x,y) \in D} f(x,y) = f(0,0) = 1$$

$$\min_{(x,y) \in D} f(x,y) = f(2,2) = -\frac{1}{e^2}$$

המקסימום

מקסימום  $z$  בנקודה  $(k)$  3 נקודות

מקסימום  $z$  בנקודה  $(k)$  3 נקודות

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(t) \cdot 2x^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot f'(t) \cdot 2y$$

$$t = y^2 - x^2 \quad \text{רלוואנט}$$

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial y} + xy \frac{\partial z}{\partial x} = x^3 \cdot 2y \cdot f' + xy f' - 2x^3 y f' = xy f' = yz$$

$$x, y \text{ שונים} \quad \frac{1}{yz} \left( x^2 \frac{\partial z}{\partial y} + xy \frac{\partial z}{\partial x} \right) = 1 \quad \text{כך}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{2d-1} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad \text{כי } d > \frac{1}{2} \quad \text{כי } \lim_{x \rightarrow 0} x^{2d-1} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

$$d > \frac{1}{2} \quad \text{כי } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \quad \text{כי } \lim_{y \rightarrow 0} y^{2d-1} \sin\left(\frac{1}{y^2}\right) = 0$$

$$\Delta f = 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

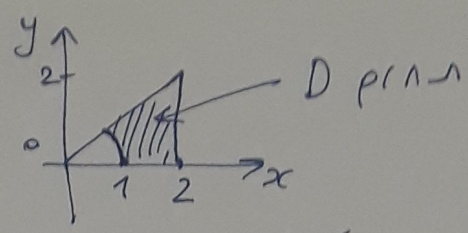
$$\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \left( (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \right)^{d-\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)$$

$$\boxed{d > \frac{1}{2}}$$

כי

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \varepsilon = 0 \Leftrightarrow d > \frac{1}{2}$$

כי



$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$ 
 גורמים לפרמטריזציה

$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} : D \text{ פרמט} \\ 1 \leq r \leq \frac{2}{\cos \varphi} \end{cases}$ 
 גבולות

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dx dy = \iint_{\substack{0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \\ 1 \leq r \leq \frac{2}{\cos \varphi}}} \frac{1}{r^4} r dr d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[ \int_1^{\frac{2}{\cos \varphi}} \frac{1}{r^3} dr \right] d\varphi$$

$$\int_1^{\frac{2}{\cos \varphi}} \frac{1}{r^3} dr = -\frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \Big|_1^{\frac{2}{\cos \varphi}} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{4} - 1 \right)$$

$$-\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{4} - 1 \right) d\varphi = -\frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi =$$

$$= \left( -\frac{1}{16} + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{4} - \frac{1}{16} \frac{\sin 2\varphi}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{7\pi}{64} - \frac{1}{32}$$