הפקולטה למדעי הטבע
המחלקה למתמטיקה

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
Ben-Gurion University of the Negev

קורס: חדו"א 1 למדעי המחשב והנדסת תוכנה, תאריך 12.09.2025, מועד א'
מספר הקורס: 201.1.2361, התוכנית האקדמית לקורס הטיס
מרצה: פרופ' ארקדי ליידרמן

---

- משך המבחן: 3 שעות.
- חומר עזר: אין.
- יש לענות על כל 5 שאלות, משקל של כל שאלה 20 נקודות.
- **יש לנמק ולהוכיח את כל טענותיכם!**
- בכל שאלה/סעיף ניתן לכתוב "**לא יודע**" ולקבל חמישית מהנקודות.
- שאלות/סעיפים בהם כתבתם "לא יודע" לא ייבדקו.

**שאלה 1** סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מוגדרת על ידי נוסחת נסיגה הבאה: $a_{n+1}=\frac{1}{3}(1+a_n+(a_n)^2)$ לכל $n$; $a_1=0$.

(א) (10 נקודות) הראו כי סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

(ב) (10 נקודות) מצאו את הגבול של סדרה $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

**שאלה 2** לכל $x\neq -1$ נגדיר פונקציה $f(x)=\text{arctg}(x)+\text{arctg}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

(א) (10 נקודות) בעזרת תכונות של נגזרת הוכיחו כי $f(x)=A$ לכל $x>-1$, $f(x)=B$ לכל $x<-1$, כאשר $A,B$ שני קבועים.

(ב) (10 נקודות) בעזרת גבולות חד-צדדיים של $f(x)$ בנקודה $x=-1$ מצאו את הערכים של $A,B$.

**שאלה 3**

(א) (5 נקודות) מצאו את הנגזרת של פונקציה $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}, x\neq 0$.

(ב) (15 נקודות) בעזרת תוצאה של סעיף (א) חישבו את הגבול של סדרה $\lim\limits_{n\to\infty} n\left((1+\frac{1}{n})^n-e\right)$.

**שאלה 4** (20 נקודות)

נניח כי פונקציה $f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה ומקיימת תכונה: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ וגבול סופי.

הוכיחו כי קיימת לפחות נקודה אחת $x$ כך ש- $f'(x)=0$.

**שאלה 5** נתון טור חזקות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\frac{\sin(n)}{2}}(x-3)^n$.

(א) (10 נקודות) מצאו תחום התכנסות של טור.

(ב) (10 נקודות) חקרו התכנסות בהחלט\בתנאי בקצוות של תחום.

**בהצלחה!**

12.09.2025

# פתרון של מבחן מחמו"א 1, 12.09.2025

## שאלה 1

(א) סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ עולה כי

$$a_{n+1}=\frac{1}{3}\left(1+a_n+(a_n)^2\right)\geq a_n \iff$$

$$1+a_n+(a_n)^2\geq 3a_n \iff (a_n-1)^2\geq 0$$

סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלמעלה: $a_n\leq 1$ לכל $n$.
הוכחה קלה מאינדוקציה.

לכן קיים גבול סופי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

(ב) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = L$, לכן

$$L=\frac{1}{3}\left(1+L+L^2\right)\Rightarrow (L-1)^2=0\Rightarrow \boxed{L=0}$$

## שאלה 2

(א)

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'=$$

$$=\frac{1}{1+x^2}+\frac{(1+x)^2}{(1+x)^2+(1-x)^2}\cdot\left(\frac{-1(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{1+x^2}+\frac{-2}{2+2x^2}=0 \qquad \text{לכל } x\neq -1$$

$f'(x)=0$ בתחום $(-1,\infty)$, לכן $f(x)=A$ קבוע בתחום $(-1,\infty)$ על פי מסקנה לגרנג'.

$f'(x)=0$ בתחום $(-\infty,-1)$, לכן $f(x)=B$ קבוע בתחום $(-\infty,-1)$ על פי מסקנה לגרנג'.

(ב)

$$\lim_{x\to -1+} f(x)=\operatorname{arctg}(-1)+\lim_{t\to+\infty}(t)=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

כי פונקציה $\operatorname{arctg}(x)$ רציפה ! $\lim\limits_{x\to -1+}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=+\infty$

$$\lim_{x\to -1-} f(x)=\operatorname{arctg}(-1)+\lim_{t\to-\infty}(t)=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=-\frac{3}{4}\pi$$

כי $\lim\limits_{x\to -1-}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=-\infty$. ומכאן $A=\frac{\pi}{4}$, $B=-\frac{3}{4}\pi$

שאלה 3 (א)

$$f(x) = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$$

$$f'(x) = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} \cdot \frac{\frac{1}{1+x}\cdot x - \ln(1+x)}{x^2} =$$

$$= (1+x)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}$$

(ב) נסמן $n = \frac{1}{x}$, $x \to 0^+ \Rightarrow n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} =$$

נשתמש בכלל לופיטל ובתוצאות של סעיף א'

$$= \lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} =$$

$$\underbrace{\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}}_{= e} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{x - \ln(1+x)(1+x)}{\underbrace{(1+x)}_{\to 1} x^2} =$$

$$= e \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{x - \ln(1+x)(1+x)}{x^2} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} =$$ בעזרת כלל לופיטל

$$= e \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \frac{1}{1+x}(1+x) - \ln(1+x)}{2x} =$$

$$= -\frac{1}{2} e \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x}}_{= 1} = \boxed{-\frac{1}{2} e}$$

שאלה 4 נתון $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.

אם $f(x)=L$ לכל $x\in\mathbb{R}$ אזי $f'(x)=0$ לכל $x$.

תהי $x_0\in\mathbb{R}$ כך ש $f(x_0)\neq L$. אז ישנם שני מקרים

1) $f(x_0)=M>L$ ; 2) $f(x_0)=M<L$.

נניח למשל כי $M>L$.

מכיוון ש $\lim_{x\to\infty} f(x)<M$ אזי יש $b>x_0$ כך ש $f(x)<M$ $\forall x\geq b$.

מכיוון ש $\lim_{x\to-\infty} f(x)<M$ אזי יש $a<x_0$ כך ש $f(x)<M$ $\forall x\leq a$.

נסכם: פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$, לכן רציפה בקטע $[a,b]$ ו $f(a)<f(x_0)$, $f(b)<f(x_0)$.

עפ"י משפט Weierstrass יש נקודה $x^*\in[a,b]$ כך ש $f(x^*)=\max_{x\in[a,b]} f(x)$, $x^*\neq a$, $x^*\neq b$, לכן $f'(x^*)=0$ עפ"י עקרון של Fermat.

מקרה (2) דומה מאוד, ההבדל היחיד: יש לטפל על $f(x^*)=\min f(x)$ במקום max.

שאלה 5

(א) מדובר בטור חזקות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-3)^n$. $a_n=\frac{1}{n+\frac{\sin(n)}{2}}$.

רדיוס ההתכנסות $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| =$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)+\frac{\sin(n+1)}{2}}{n+\frac{\sin(n)}{2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$$

לכן מרכז התחום

$-3-$ $(-1+3,1+3)=(2,4)$

(ב) עבור קצה $x=4$ מקבלים טור מספרי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{2}\sin(n)}$

טור חיובי הזה מתבדר על פי השוואה עם טור

הרמוני $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. ($|\sin x| \le 1$ לכל $x$ !)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}\sin(n)} : \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}\underbrace{\frac{\sin n}{n}}_{\to 0}}\right) = 1$$

עבור קצה $x=2$ מקבלים טור מספרי

טור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+\frac{1}{2}\sin(n)}$ עם סימנים מתחלפים.

הוא <u>לא</u> מתכנס בהחלט על פי חקירה מוקדם.

אבל הוא כן מתכנס בתנאי על פי מבחן לייבניץ. נבדוק תנאים של מבחן לייבניץ.

1) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+\frac{\sin(n)}{2}} = 0$

2) סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת כי

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1+\frac{\sin(n+1)}{2}} \le \frac{1}{n+1-\frac{1}{2}} \le \frac{1}{n+\frac{\sin(n)}{2}} = a_n$$

(כי $n+\frac{\sin(n)}{2} \le n+\frac{1}{2}$).

סופית, טור חזקות מתכנס בתחום $[2,4)$.