קורס: חדו"א 1 למדעי המחשב והנדסת תוכנה, תאריך 28.07.2025
מספר הקורס: 201-1-2361, תוכנית אקדמיזציה לטייס
מרצה: פרופ' ארקדי ליידרמן

- משך הבוחן: 2 שעות
- יש לענות על כל 3 שאלות, הניקוד של כל שאלה מצויין ליד מספר השאלה.
- יש לנמק ולהוכיח את כל טענותיכם!
- אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.
- בכל שאלה/סעיף ניתן לכתוב **"לא יודע"** ולקבל 20% מהנקודות.
- שאלות/סעיפים בהם כתבתם "לא יודע" לא ייבדקו.

מספר הנבחן ______________________

שאלה 1 (30 נקודות) יהיו A,B שתי קבוצות חסומות של מספרים ממשיים. נסמן על ידי $A-B=\{a-b : a\in A, b\in B\}$. הוכיחו כי $\sup(A-B)=\sup A-\inf B$.

שאלה 2 (40 נקודות)

(א) מצאו את הגבול $\lim_{n\to\infty} x_n$, כאשר $x_n=\frac{1}{\sqrt[5]{n^5+5\cdot 1^4}}+\frac{1}{\sqrt[5]{n^5+5\cdot 2^4}}+\frac{1}{\sqrt[5]{n^5+5\cdot 3^4}}+\dots+\frac{1}{\sqrt[5]{n^5+5\cdot n^4}}$.

(ב) מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה $\{a_n=\sin(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{4})+\frac{n}{n+5}\}_{n=1}^{\infty}$

וגם חשבו את הגבולות החלקיים עליון ותחתון של סדרה: $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$, $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n$.

שאלה 3 (30 נקודות) הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מוגדרת על ידי נוסחת נסיגה $x_1=1$, $x_{n+1}=\frac{(x_n)^4+x_n}{9}$ לכל n.

(א) הוכיחו כי סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

(ב) מצאו את הגבול $\lim_{n\to\infty} x_n$.

בהצלחה!

פתרון של מבחן מחדו"א 1, 28.07.2025

שאלה 1 נתון כי קבוצות $A,B\subset\mathbb{R}$ חסומות.

נסמן $a^*=\sup A$, $b^*=\inf B$. כדי להוכיח ש $\sup(A-B)=a^*-b^*$ יש להראות 2 דברים

1) לכל $a-b\in A-B$ מתקיים כי $a-b\le a^*-b^*$.

באמת, $a\in A \Leftarrow a\le a^*$, $b\in B \Leftarrow b^*\le b$, לכן $\begin{cases} a\le a^* \\ -b\le -b^* \end{cases}$

ולכן $a-b\le a^*-b^*$

2) לכל $\varepsilon>0$ מספר $a^*-b^*-\varepsilon$ אינו חסם מלמעלה של קבוצה $A-B$.

באמת, נתבונן במספרים $a^*-\frac{\varepsilon}{2}$, $b^*+\frac{\varepsilon}{2}$.

$a^*-\frac{\varepsilon}{2}<a^*=\sup A$, לכן יש $a\in A$ כך ש: $a^*-\frac{\varepsilon}{2}<a$

$b^*+\frac{\varepsilon}{2}>b^*=\inf B$, לכן יש $b\in B$ כך ש: $b<b^*+\frac{\varepsilon}{2}$

מכאן $a^*-b^*-\varepsilon=a^*-\frac{\varepsilon}{2}-(b^*+\frac{\varepsilon}{2})<a-b$. מ.ש.ל.

שאלה 2 (א) $n<\sqrt[5]{n^5+a}$ לכל $a>0$.

מצד שני $\sqrt[5]{n^5+5n^4}<n+1 \iff$

$n^5+5n^4<(n+1)^5=n^5+5n^4+\dots$

לכן $n\cdot\frac{1}{n+1}<x_n<n\cdot\frac{1}{n}$ לכל $n\in\mathbb{N}$

ולכן $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$ לפי משפט "סנדוויץ'"

(ב) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+5}=1$.

$\sin(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{4})=\{\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},\dots\}$

לכן $\{1+\frac{1}{\sqrt2},1-\frac{1}{\sqrt2}\}$ זאת קבוצה של גבולות חלקיים, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=1+\frac{1}{\sqrt2}$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=1-\frac{1}{\sqrt2}$.

שאלה 3 (א) נראה כי סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת וחסומה מלמטה ע"י 0 וחסומה מלמעלה ע"י 2.

בסיס לאינדוקציה.

$n=1$. $0<x_1=1<2$.

$x_2=\frac{2}{9}<x_1=1$

הנחת אינדוקציה.

$0<x_n<2$, $x_n<x_{n-1}$

מעבר ל $n+1$.

$$0<x_{n+1}=\frac{(x_n)^4+x_n}{9}<2$$

כי $x_{n+1}<\frac{2^4+2}{9}=2$

$$\frac{(x_n)^4+x_n}{9}<x_n \iff (x_n)^4+x_n<9x_n \iff$$

$$(x_n)^4-8x_n = x_n(x_n-2)(x_n^2+2x_n+4)<0$$

מאחר כי $0<x_n<2$ ו $x_n^2+2x_n+4>0$.

והכן סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת וחסומה מלמטה, לכן קיים גבול סופי $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=L$.

(ב) אם $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=L$ אזי גם $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}=L$.

מקבלים כי

$$L=\lim_{n\to\infty} x_{n+1}=\frac{L^4+L}{9}\Rightarrow L^4=8L$$

למשוואה כזאת יש 2 שורשים ממשיים $L=0$, $L=2$.

$L=2$ לא יכול להיות כי $x_n<x_1=1$ לכל n!

לכן $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.