תרגיל 1 בחדו"א 1 לתלמידי מדעי המחשב והנדסת תוכנה, 201-1-2361

1. מצאו את קבוצת המספרים הממשיים שמקיימים את כל אחד מהאי־שוויונות הבאים וסרטטו את תשובתכם על ציר המספרים:

(א) $|x-2| \le 5$.
(ב) $|x+20| \le 2$.
(ג) $1 < |y-6|$.
(ד) $|x+2|+|x+3| \le 2$.
(ה) $|x+5|+|x+7| > 1$.

2. הוכיחו או הפריכו, על ידי דוגמא נגדית, את הטענות הבאות:

(א) $|a-b| < d-c$ לכל $c < a,b < d$.
(ב) $a+b \le 1$ לכל $0 < a < b < 1$.
(ג) $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ לכל $0 < b < d$ ו־ $0 < a < c$.
(ד) $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ לכל $0 < d < b$ ו־ $0 < a < c$.

3. הוכיחו את אי־השוויונות הבאים:

(א) $|x_1+\ldots+x_n| \le |x_1|+\ldots+|x_n|$ לכל $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$.
(ב) $|a-b| \ge ||a|-|b||$ לכל $a,b \in \mathbb{R}$.

4. (א) נתונים $a,a',b,b' \in \mathbb{R}$. הוכיחו כי $|ab-a'b'| \le |a|\,|b-b'|+|b'|\,|a-a'|$.
רמז: $ab-a'b' = ab-ab'+ab'-a'b'$.

(ב) אתם נמצאים בכיתת לימוד מלבנית האורך והרוחב של הכיתה לא עולים על 10 מטר. באפשרותכם למדוד את אורך הקירות בדיוק של עד סנטימטר בודד. מהי השגיאה המקסימלית של הערכת השטח שתקבלו בעזרת המדידות שלכם?

5. יהיו $a,b \in \mathbb{R}$ מספרים חיוביים. כזכור, הממוצע החשבוני שלהם הוא $A(a,b) = \frac{a+b}{2}$ והממוצע ההנדסי הוא $G(a,b) = \sqrt{ab}$. נגדיר את הממוצע ההרמוני שלהם להיות $H(a,b) = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$. כזכור, אי־שוויון הממוצעים החשבוני־גיאומטרי אומר ש $G(a,b) \le A(a,b)$.

(א) הוכיחו כי $H(a,b) \le G(a,b)$.
(ב) אם נוסעים מחצית המרחק במהירת a ובמחצית השנייה במהירות b, מהי המהירות הממוצעת? ומהי המהירות הממוצעת אם נוסעים מחצית הזמן במהירת a ובמחצית השנייה במהירות b?

6. מהו הנפח המקסימלי בליטרים (1 ליטר = 100 סמ"ק) של תיבה אם נתון שהסכום של אורכה, גובהה ורוחבה אינו עולה על 1.58 מטר? כתבו את תשובתכם בדיוק של ליטר.

7. הוכיחו באינדוקציה את הטענות הבאות.

(א) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \sum_{k=0}^{n} k^2$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
(ב) (אי־שוויון ברנולי) $(1+a)^n \ge 1+na$ לכל $a > -1$ ולכל $n \in \mathbb{N}$.
(ג) $(1+a)^n \ge 1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2$ לכל $a > 0$ ולכל $n \in \mathbb{N}$.
(ד) (הבינום של ניוטון) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ לכל $a,b \in \mathbb{R}$ ולכל $n \in \mathbb{N}$. (תזכורת: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$)