

תרגיל 2 בחדו"א 1 לתלמידי מדעי המחשב והנדסת תוכנה, 201-1-2361

1. תהא A קבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים חיוביים. נגדיר $\frac{1}{A} = \{\frac{1}{a} : a \in A\}$. הוכיחו:

$$(א) \text{ אם } \inf(A) > 0 \text{ אז } \sup\left(\frac{1}{A}\right) = \frac{1}{\inf(A)}$$

$$(ב) \text{ אם } \inf(A) = 0 \text{ אז } \sup\left(\frac{1}{A}\right) = \infty$$

2. תהיינה A, B קבוצות לא ריקות של מספרים ממשיים. הוכיחו כי $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$.

3. בכל הסעיפים הבאים מצאו את הסופרמום, האינפימום ובמידה וקיימים גם מינימום ומקסימום של הקבוצות הנתונות. יש לנמק את התשובה!

$$(ד) A = \{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} : n \in \mathbb{N}\}$$

$$(א) A = \left\{\frac{1}{n} : 2021 \leq n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$(ה) A = \left\{\sqrt{n^2+1} - \lfloor \sqrt{n^2+1} \rfloor : n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$(ב) A = \left\{\frac{m}{m+n} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$(ו) A = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in (0, 1)\right\}$$

$$(ג) A = \left\{\frac{mn}{4m^2+n^2} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

4. נסמן ב A_n את השטח של מצולע משוכלל בעל 2^n צלעות החסום במעגל היחידה. תהא $A = \{A_n : 2 \leq n \in \mathbb{N}\}$. הראו שהקבוצה חסומה מלעיל. מהו הספרמום שלה?

5. הוכיחו את הגבולות הבאים ישירות ע"פ הגדרת הגבול:

$$(א) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + (-1)^n}{3n} = \frac{2}{3}$$

$$(ב) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \cos(n^2) = 0$$

$$(ג) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4 + \sqrt{n}} = 0$$

6. הוכיחו ע"פ שלילת הגדרת הגבול ש:

$$(א) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+3} \neq 1$$

(ב) לכל $L \in \mathbb{R}$, הסדרה $(-1)^n n$ אינה מתכנסת ל- L .