

תרגיל 3 בחדו"א 1 לתלמידי מדעי המחשב והנדסת תוכנה, 201-1-2361

1. הוכיחו את הגבולות הבאים ע"פ הגדרת הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + n^2 - n^4) = -\infty \quad (\text{ג})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+1}{510\sqrt{n}} = +\infty \quad (\text{ב})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15n^2}{5n^2-1} = 3 \quad (\text{א})$$

2. חשבו את הגבולות הבאים או הוכיחו שאינם קיימים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 1}{2n^2 + n - 2} \quad (\text{ו})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad (\text{א})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\pi} + \frac{9}{\pi^2} + \dots + \frac{3^n}{\pi^n} \quad (\text{ז})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! - n!}{(n+1)! + n!} \quad (\text{ב})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad (\text{ח})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin(n!) \quad (\text{ג})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2021!}{2021n} \quad (\text{ט})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{2n^2} \quad (\text{ד})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^4 + 3n} - \sqrt{n^4 - 1} \quad (\text{י})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 1} - n \right) \quad (\text{ה})$$

3. תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

$$(\text{א}) \text{ נניח ש } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ אזי } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$$

$$(\text{ב}) \text{ נניח ש } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a| \text{ אזי } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

$$(\text{ג}) \text{ נניח ש } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a| \text{ וכן } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ מתכנסת, אזי } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

(ד) נניח ש $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ונסמן $b_n = \frac{1}{a_n}$ אזי $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במוסן הרחב לאינסוף או למינוס אינסוף.

$$(\text{ה}) \text{ נניח ש } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ אזי } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$$

(ו) נניח ש $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ואילו $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ לא מתכנסת. אזי $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ לא מתכנסת.

(ז) אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה אז $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

(ח) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2021$ אזי קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n > 2020$.

(ט) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ אזי קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n \leq b_n$.

(י) אם $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, אזי שתי הסדרות $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומות.