



תרגיל 4 בחדו"א 1 לתלמידי מדעי המחשב והנדסת תוכנה, 201-1-2361

1. חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3) \cdot (4n+1)} \right) \quad (\text{א})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n} \quad (\text{ג}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 \sin^2 \left(\frac{n^{2020}}{n+1} \right) + \cos^2 \left(\frac{n^{2020}}{n+1} \right)} \quad (\text{ב})$$

2. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת $0 \leq a_{m+n} \leq \frac{1}{2}(a_m + a_n)$ לכל $m, n \in \mathbb{N}$. הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$.

3. (א) תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = L > 0$. האם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ בהכרח מתכנסת במובן הרחב? נמקו!

(ב) הוכיחו את "משפט הפיצה": אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המתכנסת במובן הרחב לאינסוף ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה שעבורה קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $b_n \geq a_n$ אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.

4. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת ונגדיר סדר חדשה $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ ע"י $b_n = \max \{a_1, \dots, a_n\}$ לכל $n \in \mathbb{N}$. הוכיחו כי גם $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

5. תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות המוגדרות באופן הבא: $a_1, b_1 > 0$ קבועים נתונים, ולכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n}$ ו- $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$. הוכיחו כי שתי הסדרות מתכנסות ולאותו הגבול.

6. נגדיר סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ בעזרת נוסחת נסיגה: $a_1 = 0$ ו- $a_{2n} = \frac{1}{2}a_{2n-1}$, $a_{2n+1} = \frac{1}{2} + a_{2n}$. מצאו את $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ ואת $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$.