תרגיל 5 בחדו"א 1 לתלמידי מדעי המחשב והנדסת תוכנה, 201-1-2361

1. חקרו את התכנסות הטורים הבאים תוך שימוש במבחני התכנסות מתאימים:

(א) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$

(ב) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}$

(ג) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

(ד) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$

(ה) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4+(-1)^n)^n}$

(ו) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1!+2!+\ldots+n!}{(2n)!}$

(ז) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

(ח) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}$

(ט) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}{n^2}$

(י) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5^n+7^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$

(יא) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$

2. נתון כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ הוא טור חיובי.

(א) הוכיחו שאם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס.

(ב) הוכיחו שהתכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ לא בהכרח גוררת את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(ג) הוכיחו שאם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מונוטונית והטור $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס, אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

3. נתון כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי. נסמן $p_n = \frac{|a_n|+a_n}{2}$ ו־ $q_n = \frac{|a_n|-a_n}{2}$.

(א) הוכיחו כי שני הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ ו־ $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ מתבדרים.

(ב) לכל n טבעי נסמן: $P_n = \sum_{k=1}^{k} p_k$ ו־ $Q_n = \sum_{k=1}^{k} q_k$. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n} = 1$.

4. קבעו האם הטורים הבאים מתכנסים בהחלט, מתכנסים בתנאי או מתבדרים:

(א) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

(ב) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n}+(-1)^{n-1}}$

(ג) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n^2}$

(ד) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$

(ה) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$