

תרגיל 6 בחדו"א 1 לתלמידי מדעי המחשב והנדסת תוכנה, 201-1-2361

1. הוכיחו בעזרת הגדרת הגבול לפי קושי:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{3x-2} = \frac{2}{3} \quad (\text{ג}) \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+1}{(x+2)^2} = \infty \quad (\text{ב}) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}} \frac{16x^2-9}{4x-3} = 6 \quad (\text{א})$$

2. יהא $a > 0$ ותהא $f: (-a, a) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$. הראו כי:

(א) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$ אם ורק אם $\lim_{x \rightarrow 0} f(\sin x) = L$. (ניתן להשתמש בכך ש $|\sin x| < |x|$ לכל $x \neq 0$)

(ב) אם $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$ אז $\lim_{x \rightarrow 0} f(|x|) = L$. האם גם טענה זו היא "אם ורק אם"?

3. נתונה הפונקציה $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ -x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. הוכיחו את הטענות הבאות:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad (\text{א})$$

(ב) לכל $a \neq 0$ הגבול $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ לא קיים.

(ג) הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x+1}$ לא קיים.

4. חקרו את רציפות הפונקציות הבאות. במידה ויש נקודות אי-רציפות, קבעו את סוגיהן:

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{\ln(x^2)}\right) \quad (\text{ג}) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2-2x}-1}{3x-6} & x \neq 2 \\ \frac{2}{3} & x = 2 \end{cases} \quad (\text{א})$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + e^{nx}}{1 + e^{nx}} \quad (\text{ד})$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x} & x < \frac{\pi}{2} \\ [x] - 1 & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2x-5} & x > \frac{5}{2} \end{cases} \quad (\text{ב})$$

5. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם הפונקציה $f(x)$ רציפה בנקודה $x = a$ אז גם הפונקציה $|f(x)|$ רציפה בנקודה זו.

(ב) אם הפונקציה $|f(x)|$ רציפה בנקודה $x = a$ אז גם הפונקציה $f(x)$ רציפה בנקודה זו.

(ג) אם הפונקציה $f(x)$ רציפה בנקודה $x = a$ ו- $f(a) > 0$ אז הפונקציה $f(x)$ חיובית בתחום $a - 0.01 < x < a + 0.01$.

(ד) אם הפונקציה $f(x)$ רציפה בנקודה $x = a$ ו- $f(a) > 0$ אז קיימת $\delta > 0$ כך שהפונקציה $f(x)$ חיובית בתחום $a - \delta < x < a + \delta$.

(ה) אם הנקודה $x = a$ היא נקודת אי-רציפות מסוג ראשון ("קפיצה") של הפונקציה $f(x)$, אז $x = a$ היא נקודת אי-רציפות מסוג ראשון של הפונקציה $f^2(x)$.