

## תרגיל 7 בחדו"א 1 לתלמידי מדעי המחשב והנדסת תוכנה, 201-1-2361

1. יהא  $a > 0$  ותהא  $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה המקיימת  $f(a) = f(0)$ . הוכיחו שקיים  $x_0 \in [0, \frac{a}{2}]$  כך ש  $f(x_0) = f(x_0 + \frac{a}{2})$ .
2. הוכיחו כי אם  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה והגבולות  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ו-  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  קיימים וסופיים אזי  $f$  חסומה ב- $\mathbb{R}$ .
3. הוכיחו/הפריכו: תהא  $f$  פונקציה רציפה בקטע פתוח  $(a, b)$  כך ש  $f(x) \in \mathbb{Q}$  לכל  $x \in (a, b)$ . אזי  $f$  פונקציה קבועה בקטע.
4. תהיינה  $f, g$  שתי פונקציות רציפות בקטע  $[0, 1]$  המקיימות  $g([0, 1]) = [0, 1]$  ו-  $f([0, 1]) \subseteq [0, 1]$ . הוכיחו שקיימת  $x_0 \in [0, 1]$  כך ש  $f(x_0) = g(x_0)$ .
5. נניח שהטמפרטורה על כדור הארץ תלויה באופן רציף במיקום. הוכיחו כי:
  - (א) בכל רגע נתון יש על קו המשווה נקודה שבה הטמפרטורה היא הכי גבוהה מבין כל הנקודות על קו המשווה.
  - (ב) בכל רגע נתון יש שתי נקודות נגדיות על קו המשווה בהן יש את אותה הטמפרטורה בדיוק.
6. הוכיחו כי אם  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה במידה שווה אזי הגבולות  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  ו-  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$  קיימים וסופיים.
7. הוכיחו כי הפונקציה  $f(x) = \ln x$  אינה רציפה במידה שווה בקטע  $(0, 1)$ .

8.

הוכיחו כי אם שתי פונקציות  $f, g$  הן פונקציות רציפות בתחום מסוים אז גם פונקציות  $\min\{f, g\}, \max\{f, g\}$  הן פונקציות רציפות בתחום