

תרגיל 9 בחדו"א 1 לתלמידי מדעי המחשב והנדסת תוכנה, 201-1-2361

1. (א) הוכיחו כי הפונקציה  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  המוגדרת ע"י  $h(x) = x + e^x$  היא הפיכה, וחשבו את  $(h^{-1})'(1)$ .  
 (ב) הוכיחו כי הפונקציה  $h: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$  המוגדרת ע"י  $h(x) = \tan x + \arctan x$  היא הפיכה. יהי  $c \in \mathbb{R}$  כך ש  $h(c) = 1$ . חשבו את  $(h^{-1})'(1)$ . (התשובה תהיה תלויה ב  $c$ )

2. הוכיחו את אי-השוויונות הבאים:

(א)  $\frac{\sin x}{x} \geq \frac{2}{\pi}$  בקטע  $(0, \frac{\pi}{2})$ .

(ב)  $x < \arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$  בקטע  $(0, 1)$ .

(ג)  $px^{p-1}(x-y) < x^p - y^p < px^{p-1}(x-y)$  עבור  $p > 1$  ו-  $0 < y < x$ .

(ד)  $|\tan x - \tan y| \leq 8|\sin x - \sin y|$  לכל  $x, y \in [0, \frac{\pi}{3}]$ .

3. תהא  $f$  פונקציה גזירה פעמיים בקטע  $[0, 2]$ . נניח כי  $f(0) = 0, f(1) = 2, f(2) = 4$ . הוכיחו שקיימת נקודה  $x_0 \in (0, 2)$  כך ש  $f''(x_0) = 0$ .

4. הוכיחו כי למשוואה  $x^{10} + x^4 + 2x^2 = 18$  קיימים בדיוק שני פתרונות ב- $\mathbb{R}$ .

5. קבעו את תחומי הגזירות של הפונקציות הבאות וחשבו את נגזרתן:

(א)  $f(x) = x|x|$  (ב)  $f(x) = |\sin(x^3)|$  (ג)  $f(x) = \arcsin(\sin x - \cos x)$

6. חשבו את הגבולות הבאים:

(א)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x a^x \sin x}{a^x - 1}$  כאשר  $a > 0$  ו-  $a \neq 1$ .

(ב)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(5x)}{e^{3x} - 3x - 1}$  (ג)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x$  (ד)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$  (ו)

(ז)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e \right)$  (ח)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(x+1)}{x^3}$  (ט)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\ln(x+1)}$

7. עבור הפונקציה  $f(x)$  מצאו את פולינום טיילור מסדר  $n$  סביב הנקודה  $x_0$ :

(א)  $x_0 = 1, n = 2, f(x) = \sqrt{x}$  (ב)  $x_0 = 1, n = 3, f(x) = x^x - 1$

(ג)  $x_0 = 0, n = 4, f(x) = \ln(\cos x)$

8. הפונקציה  $f(x)$  גזירה פעמיים ברציפות בקטע  $[0, 1]$  ומקיימת  $f(0) = f(1) = 0$ . ידוע כי  $|f''(x)| \leq A$  לכל  $x \in (0, 1)$ . הוכיחו כי לכל  $0 \leq x \leq 1$  מתקיים  $|f'(x)| \leq \frac{A}{2}$ .

9. העזרו בפיתוח טיילור כדי לקרב את המספרים הבאים ברמת דיוק של  $10^{-4}$ :

(א)  $\sin\left(\frac{1}{3}\right)$  (ב)  $\ln(1.05)$  (ג)  $\sqrt{24}$