

המחלקה למתמטיקה, בן-גוריון

אשנב\צוהר למתמטיקה

ביום שלישי, 4 בדצמבר, 2018

בשעה 18:15 – 19:45

באולם 101-

ההרצאה

פונקציות של משתנים לא מתחלפים

תינתן על-ידי

ויקטור ויניקוב

תקציר: הפונקציות אותן פגשתם ברב הקורסים באנליזה הן פונקציות של כמה וכמה משתנים שמקבלים ערכים מספריים; דהיינו המשתנים של הפונקציה הם קומוטטיביים (מתחלפים). גם חיות קצת יותר אקזוטיות, אם פגשתם כאלה, אינן שונות בתכלית: פונקציה על מרחב הילברט או מרחב בנך היא פונקציה של אינסוף משתנים קומוטטיביים, ופונקציה על יריעה N מימדית היא באופן מקומי פונקציה של N משתנים קומוטטיביים. דוגמא שכולנו מכירים מהגן (או לפחות משנה א) למשתנים לא קומוטטיביים היא מטריצות. מסתבר שלמרות שמטריצות 2×2 אינן מתחלפות, הן מקיימות איזשהם יחסים אלגבריים, והוא הדין לגבי מטריצות מכל סדר קבוע. אבל לא קשה לראות כי אין אף יחס אלגברי שמתקיים למטריצות מכל הסדרים. הדבר מוביל אותנו (או ביתר דיוק, הוביל את ג'וזף ל. טיילור בעבודה פורצת דרכים בראשית שנות ה-70 של המאה הקודמת) להגדיר פונקציה של N משתנים לא קומוטטיביים חפשיים להיות פונקציה שהתחום שלה הוא קבוצה באיחוד הזר של N -יות של מטריצות ריבועיות מסדר M , כאשר M רץ מ-1 עד אינסוף. כמובן כדי להיות פונקציה לא

קומוטטיבית אמיתית - ולא סתם אספסוף של פונקציות שונות לכל סדר M - על הפונקציה שלנו לקיים איזשהם יחסי תיאום כאשר אנו משנים את סדר המטריצות.

מסתבר שליחסי התיאום הפשוטים האלה יש השלכות מרחיקות לכת. פונקציות לא קומוטטיביות דומות לפונקציות אנליטיות (או לפתרונות של משוואות דיפרנציאליות חלקיות אליפטיות, אם יצא לכם להכיר) בכך שיש להן תכונות רגולריות מדהימות: פונקציה לא קומוטטיבית שהיא חסומה באפן מקומי הינה אנליטית וניתנת לפיתוח לטור חזקות (לא קומוטטיבי) שאנו קוראים לו טור טיילור-טיילור, על שם ברוק טיילור מאינפי 1 וג'וזף ל. טיילור שהוזכר למעלה. הסיבה לניסים ונפלאות אלה, ורבים אחרים, היא כי ניתן לפתח חשבון דיפרנציאלי עבור פונקציות לא קומוטטיביות.

התחום של תורת הפונקציות הלא קומוטטיבית מתפתח במהירות בעשור האחרון, עם קשרים לכמה וכמה תחומים אחרים באנליזה פונקציונלית (הסתברות חפשית, מרחבי אופרטורים) אך גם באלגברה (חוגים חפשיים ושדות השברים שלהם) ואף במערכות ובקרה (אי שיויונים לינאריים מטריציאליים לבעיות שאינן תלויות מימד)