המחלקה למתמטיקה, בן-גוריון

אשנב למתמטיקה

ביום *שלישי, 7 בינואר, 2020*

בשעה *16:10 – 17:30*

באולם *101-*

ההרצאה

בעיית המטריצות האוניטאריות הכמעט-מתחלפות

תינתן על-ידי

אילן הירשברג

תקציר: ניזכר בכמה הגדרות. עבור אופרטור לינארי $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ מגדירים את הנורמה $\|T\| = \sup\{\|Tv\| : \|v\| = 1\}$. ניתן להגדיר באופן דומה נורמה על אופרטורים על מרחבים אינסוף מימדיים גם כן.

אופרטור P נקרא *אופרטור הטלה* אם $P = P^* = P^2$ ואופרטור U נקרא *אופרטור אוניטארי* אם $U^* = U^{-1}$

לגבי כל תכונה של אופרטורים מסוג זה, אפשר לשאול עד כמה היא "גמישה". כלומר, נניח שיש אופרטור ש"כמעט" מקיים את התכונה. האם יש אופרטור שקרוב אליו שכן מקיים את התכונה? באופן מדויק יותר, למשל, בהינתן $\varepsilon > 0$ האם קיים $\delta > 0$ כך שלכל אופרטור T, אם $\|T - T^*\| < \delta$ ו-$\|T - T^2\| < \delta$ אז קיימת הטלה P כך ש-$\|P - T\| < \varepsilon$. שימו לב שהמספר δ אינו תלוי ב-n. זהו תרגיל באלגברה לינארית, ואתם יכולים לנסות לפתור אותו בעצמכם לפני ההרצאה. כנ"ל השאלה האנלוגית עבור אופרטורים אוניטאריים.

השאלה שנדון בה נוגעת לזוג אופרטורים. נניח שיש לנו זוג אופרטורים אוניטאריים שכמעט מתחלפים, כלומר $||UV - VU||$ קטן. האם הם קרובים לזוג אופרטורים אוניטאריים שמתחלפים ממש?

בשנות ה-80', המתמטיקאי Voiculescu הראה שהתשובה היא שלילית: ישנם אופרטורים אוניטאריים שקרובים כרצונכם להתחלף אך אינם קרובים לאופרטורים אוניטאריים שמתחלפים בדיוק. ניתן לתת לכך הוכחה די פשוטה וישירה, שאנסה להציג בקצרה. אך מעניין יותר להבחין כי בעיה זו מתקשרת לסוגיות עמוקות יותר בטופולוגיה ואלגבראות של אופרטורים. ככל שיתיר הזמן, אנסה לקשר את השאלה לאלגבראות C^*, תורת K ואגדים וקטוריים, ו"כמעט הצגות" של חבורות, אך לא אניח ידע מוקדם בנושא זה.

כדאי לפני ההרצאה להזכיר לעצמכם מספר מושגים מאלגברה לינארית: מכפלה פנימית, נורמה מטריצאלית, אופרטורים אוניטאריים, נורמליים, צמודים לעצמם והטלות והפירוק הפולארי, וכן מה ההגדרה של מרחב הילברט.