

המחלקה למתמטיקה, בן-גוריון

אשנב למתמטיקה

ביום שלישי, 9 בינואר, 2024

בשעה 18:00 – 19:30

באולם 101-, בניין מתמטיקה

ההרצאה

נקודות רציונליות על עקומים אליפטיים, עקומים מודולריים והעקום המקולל

חינתן על-ידי

אמנון בסר

תקציר: בעייה יסודית בתורת המספרים היא להבין את אוסף הפתרונות במספרים רציונליים למשוואה פולינומיאלית בשני משתנים. מסתבר שפתרון הבעייה תלוי באינווריאנטה של המשוואה הקרויה הגנוס. כאשר מספר שלם זה הוא 0 מציאת כל הפתרונות היא משימה קלה מאד. כאשר הגנוס גדול מ-1 משפט מפורסם משנות השמונים של המאה ה-20 מראה שיש רק מספר סופי של פתרונות. מציאת כל הפתרונות היא בעייה קשה מאד.

כאשר הגנוס הוא 1 המשוואה נקראת עקום אליפטי. במקרה כזה ניתן להגדיר על אוסף הפתרונות מבנה של חבורה אבלית בשיטה גאומטרית פשוטה. משפט Mordell-Weil מראה שחבורה זו נוצרת סופית ולפיכך, גם כאשר מספר הפתרונות הוא אינסופי יש מספר סופי של פתרונות בסיסיים אשר מהם אפשר לקבל את כל הפתרונות. נסקור את ההוכחה של משפט זה ואת התורה של גבהים עליה היא מבוססת.

לפי משפט המבנה של חבורות אבליות, החבורה של עקום אליפטי היא מכפלה של מספר עותקים סופי r של החבורה החיבורית של השלמים, ושל חבורת הפיתול, כלומר, אוסף הפתרונות של משוואת העקום שהם מסדר סופי. המספר r נקרא הדרגה של העקום והוא נושאה של ההשערה של Swinnerton-Dyer Birch שהיא אחת מהשערות מליון הדולר המפורסמות של מכון קליי. נושא מחקרי מעניין אחר הוא חבורת הפיתול. משפט מפורסם של Mazur אומר שלעקום אליפטי מעל המספרים הרציונליים יש לכל היותר 16 נקודות פיתול. ידועות הכללות של המשפט הזה לנקודות של עקומים אליפטיים מעל שדות אחרים.

בשנים האחרונות יש מחקר יותר מעמיק של התנהגות הפיתול של עקום אליפטי. אפשר למשל לשאול במקום האם יש נקודת פיתול מסדר n עם קואורדינטות רציונליות האם קיימת תת חבורה צקלית מסדר n שמוגדרת כולה מעל הרציונליים, כלומר שתת החבורה נשמרת תחת אוטומורפיזם גלואה. עקומים אליפטיים עם מבנה נוסף כזה ממוינים על ידי עקומים מודולריים ולכן הבעייה היא בעצם למצוא נקודות רציונליות על עקומים מודולריים. נסביר מעט על התורה של עקומים מודולריים והקשר שלהם לעקומים אליפטיים, ועל הקשר להשערת פרמה.

עקום מודולרי אחד שהבעייה של מציאת הנקודות הרציונליות עליו התבררה כקשה במיוחד זכה לכינוי "העקום המקולל". לפני 4 שנים הצליחו לפתור את הבעייה. באופן מפתיע, לפתרון יש קשר גם לתורת הגבהים.