BEN GURION UNIVERSITY OF THE NEGEV
BE'ER SHEVA 84105, ISRAEL

אוניברסיטת בן גוריון בנגב
באר שבע 84105

המחלקה למתמטיקה

בחינת גמר בקורס מבוא לאלגברה ליניארית
כולל פתרון לשאלה 2

תאריך הבחינה: 20.1.03
שם המורים: פרופ' אמנון יקותיאלי, פרופ' גריגורי משביצקי, ד"ר אפרים גורביץ', מר עמיחי מנוחין
מס' קורס 201-1-9041
שנה: תשס"ג 2002/3 סמסטר: א' מועד: א'
משך הבחינה: 2 שעות
חומר עזר: מחשבון פשוט

הנחיות:

- ענה על 4 (בדיוק) מתוך 6 השאלות הבאות. כל שאלה שווה 25 נקודות.
- ניתן לצטט משפטים וטענות שהוכחו בכתה.
- נמק והראה את שלבי החישוב (רצוי לבדוק).
- נא לכתוב ברור ונקי!

סימונים: האותיות $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ו־ $\mathbb{C}$ מייצגות את השדות של המספרים הרציונליים, הממשיים והמרוכבים בהתאמה. הביטוי $\mathrm{M}_{m\times n}(F)$ מסמן את קבוצת המטריצות בגודל $m \times n$ מעל השדה F. האותיות O ו־ I מסמנות את מטריצות (או את טרנספורמציות) האפס והיחידה בהתאמה. הביטוי $\vec{e}_i$ מסמן את הוקטור ב־ F^n שהרכיב ה־ i שלו 1 ויתר הרכיבים הם 0. עבור פולינום $f(x)$ מעל $\mathbb{R}$ הביטוי $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ מסמן את הנגזרת של f.

1. נתונה המטריצה $A := \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$ מעל השדה $\mathbb{R}$.
   א. מצא את הפולינום האופייני $p_A(x)$.
   ב. לכסן את A; כלומר מצא מטריצה הפיכה P עם רכיבים ב־ $\mathbb{R}$ כך ש־ $P^{-1}AP$ אלכסונית.
   ג. הראה כי גם המטריצה $P^{-1}(A-I)P$ היא אלכסונית.
   ד. חשב את המטריצה $A^{100}(A-I)^{-50}$.

2. תהי A מטריצה בגודל $n \times n$ מעל שדה F, כאשר n שלם חיובי כלשהו.
   א. נניח ש־ λ הוא ערך עצמי של A. הוכח כי λ^2 הוא ערך עצמי של המטריצה A^2.
   ב. נניח ש־ $A^2 = O$. הוכח כי 0 הוא ערך עצמי של A.
   ג. שוב נניח ש־ $A^2 = O$. הוכח כי אין ל־ A ערכים עצמיים פרט ל־ 0.

פתרון.

א. יהי $v \in F^n$ וקטור עצמי של A השייך לערך העצמי λ. אז

$$A^2v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda Av = \lambda^2 v\ .$$

מאחר ש־ $v \neq \vec{0}$ קיבלנו ש־ λ^2 ערך עצמי של A^2.

ב. ניקח וקטור $v \in F^n$ שונה מאפס כלשהו. אם $Av = \vec{0}$ הרי v הוא וקטור עצמי של A השייך לערך העצמי 0. אחרת הווקטור $w := Av$ שונה מאפס ומקיים

$$Aw = AAv = A^2v = Ov = \vec{0}\ .$$

לכן w הוא וקטור עצמי של A השייך לערך העצמי 0.
הוכחה חלופית לסעיף זה: מאחר ש־ $A^2 = O$ הרי $\det(A^2) = 0$. ע״פ משפט מתקיים

$$\det(-A)^2 = \det(-A) \cdot \det(-A) = \det((-A) \cdot (-A)) = \det(A^2) \ .$$

לכן

$$\det(0 \cdot I - A) = \det(-A) = 0$$

וזה אומר ש־ 0 ערך עצמי של A.
ג. יהי λ ערך עצמי של A. על פי סעיף א׳ λ^2 הוא ערך עצמי של A^2. אבל נתון ש־ $A^2 = O$, ולכן הערך העצמי היחיד של A^2 הוא 0. מכאן $\lambda^2 = 0$ וגם $\lambda = 0$.

3. נתונה המטריצה $A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{Q})$.
א. מצא את הפולינום האופייני $P_A(x)$.
ב. מצא את הערכים העצמיים של A (בשדה $\mathbb{Q}$).
ג. האם A ניתנת לליכסון (מעל $\mathbb{Q}$)? אם כן לכסן את A ; אם לא נמק.

4. בשאלה זו השדה הוא $\mathbb{R}$ והמרחב הוא

$$V := \{\ f(t) \text{ פולינומים } \text{ ממעלה } \leq 2 \text{ עם מקדמים ב־ } \mathbb{R}\ \}$$

נגדיר טרנספורמציה ליניארית $T : V \to \mathbb{R}^3$ ע״י

$$T(f) := \begin{bmatrix} f(0) + f(-1) \\ f(1) \\ f(2) \end{bmatrix} \ .$$

א. חשב את המטריצה $[T]^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}}$ המייצגת את T ביחס לבסיסים הסדורים $\mathbf{v} := (1, t, t^2)$ ו־ $\mathbf{w} := (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
ב. מצא פולינום $f(t)$ ב־ V כך ש־ $f(0) + f(-1) = 1$, $f(1) = 1$ ו־ $f(2) = 8$.
ג. האם יש פולינום $g(t)$ ב־ V כך ש־ $g(0)+g(-1) = 0$, $g(1) = 0$, $g(2) = 0$ ו־ $g(3) = 13$? אם כן מצא כזה $g(t)$; אם לא נמק.

5. תהי $T : \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{Q}) \to \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{Q})$ הפונקציה

$$T(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) := \begin{bmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{bmatrix} \ .$$

א. הראה כי T אופרטור ליניארי.
ב. מצא ערכים עצמיים של T ואת הוקטורים עצמיים השייכים להם.
ג. לכל ערך עצמי λ חשב את מימד המרחב העצמי V_λ.
ד. האם T ניתן לליכסון? נמק.

6. בשאלה זו השדה הוא $\mathbb{R}$ והמרחב הוא

$$V := \{\ f(t) \text{ פולינומים } \text{ ממעלה } \leq 3 \text{ עם מקדמים ב־ } \mathbb{R}\ \} \ .$$

נגדיר פונקציה $T : V \to V$ ע״י הנוסחה

$$T(f) := \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + 3\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} \ .$$

א. הוכח כי T אופרטור ליניארי.

ב. חשב את המטריצה $[T]_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}}$ המייצגת את T ביחס לבסיס הסדור $\mathbf{v} := (1, t, t^2, t^3)$.

ג. מצא בסיסים של $\mathrm{Ker}(T)$ ו־ $\mathrm{Im}(T)$.

בהצלחה!