BEN GURION UNIVERSITY OF THE NEGEV
BE'ER SHEVA 84105, ISRAEL

אוניברסיטת בן גוריון בנגב
באר שבע 84105

המחלקה למתמטיקה

בחינת גמר בקורס מבוא לאלגברה ליניארית

תאריך הבחינה: 12.2.03
שם המורים: פרופ׳ אמנון יקותיאלי, פרופ׳ גריגורי משביצקי, ד״ר אפרים גורביץ׳, מר עמיחי מנוחין
מס׳ קורס 201-1-9041
שנה: תשס״ג 2002/3 סמסטר: א׳ מועד: ב׳
משך הבחינה: 2 שעות
חומר עזר: מחשבון פשוט

הנחיות:

- ענה על 4 (בדיוק) מתוך 6 השאלות הבאות. כל שאלה שווה 25 נקודות.
- ניתן לצטט משפטים וטענות שהוכחו בכתה.
- נמק והראה את שלבי החישוב (רצוי לבדוק).
- נא לכתוב ברור ונקי!

סימונים: האותיות $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ו־ $\mathbb{C}$ מייצגות את השדות של המספרים הרציונליים, הממשיים והמרוכבים בהתאמה. הביטוי $\mathrm{M}_{m\times n}(F)$ מסמן את קבוצת המטריצות בגודל $m \times n$ מעל השדה F. האותיות O ו־ I מסמנות את מטריצות (או את טרנספורמציות) האפס והיחידה בהתאמה. הביטוי $\vec{e}_i$ מסמן את הוקטור ב־ F^n שהרכיב ה־ i שלו 1 ויתר הרכיבים הם 0. עבור פולינום $f(x)$ מעל $\mathbb{R}$ הביטוי $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ מסמן את הנגזרת של f.

1. נתונה המטריצה $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ מעל השדה $\mathbb{Q}$.
   א. מצא את הפולינום האופייני $p_A(x)$.
   ב. לכסן את A; כלומר מצא מטריצה הפיכה P עם רכיבים ב־ $\mathbb{Q}$ כך ש־ $P^{-1}AP$ אלכסונית.
   ג. פתור את המשוואה $X^2 = A + I$ ב־ $\mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{Q})$ (מצא לפחות פתרון אחד).

2. בשאלה זו השדה הוא $\mathbb{Q}$ ו־ $W := \mathrm{Sp}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \subset \mathbb{Q}^3$.
   א. האם יש טרנספורמציה ליניארית $T : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^2$ כך ש־ $\mathrm{Ker}(T) = W$ ו־ $T(\vec{e}_3) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$? אם כן תן דוגמה; אם לא נמק.
   ב. האם יש טרנספורמציה ליניארית $S : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^2$ כך ש־ $\mathrm{Ker}(S) = W$ ו־ $\mathrm{Im}(S) = \mathbb{Q}^2$? אם כן תן דוגמה; אם לא נמק.
   ג. האם יש אופרטור ליניארי $R : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ כך ש־ $R^2 \neq O$ אבל $R^3 = O$? אם כן תן דוגמה; אם לא נמק.

3. בשאלה זו השדה הוא $\mathbb{R}$ והמרחב הוא

$V := \{$ פולינומים $f(t)$ ממעלה ≤ 2 עם מקדמים ב־ $\mathbb{R}$ $\}$.

נגדיר פונקציה $T : V \to V$ ע"י הנוסחה

$$T(f) := (t+2)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} .$$

א. הוכח כי T אופרטור ליניארי.

ב. חשב את המטריצה $[T]^{\mathbf{v}}_{\mathbf{v}}$ המייצגת את T ביחס לבסיס הסדור $\mathbf{v} := (1, t, t^2)$.

ג. מצא את הפולינום האופייני $P_T(x)$ ואת הערכים העצמיים של T.

ד. האם T ניתן לליכסון? נמק.

4. נתונה המטריצה $A := \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

א. מצא את הפולינום האופייני $P_A(x)$ ואת הערכים העצמיים של A.

ב. האם A ניתנת לליכסון? אם כן לכסן את A; אם לא נמק.

ג. תהי B מטריצה ב־ $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ המקיימת $B^2 + I = A$, ויהי μ ערך עצמי של B. הוכח כי $\mu^2 + 1$ הוא ערך עצמי של A.

5. יהי F שדה כלשהו, יהיו $a_1, \ldots, a_n$ סקלרים ותהי

$$A := \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{n\times n}(F)$$

א. חשב את $\det(A)$ עד כדי סימן.

ב. מה התנאי על הסקלרים $a_1, \ldots, a_n$ כך שהמטריצה A תהיה הפיכה?

ג. נניח ש־ A הפיכה. חשב את A^{-1}.

6. בשאלה זו השדה הוא $\mathbb{R}$. נתון אופרטור ליניארי $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המקיים $T(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$,

$T(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ו־ $T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

א. חשב את המטריצה $A := [T]^{\mathbf{v}}_{\mathbf{v}}$ המייצגת את T ביחס לבסיס הסטנדרטי $\mathbf{v} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

ב. חשב את המטריצה A^{-1}.

ג. מצא וקטור u כך ש־ $T(u) = \vec{e}_1$.

ד. מצא וקטור w כך ש־ $T^2(w) = \vec{e}_1$.

בהצלחה!