BEN GURION UNIVERSITY OF THE NEGEV
BE'ER SHEVA 84105, ISRAEL

אוניברסיטת בן גוריון בנגב
באר שבע 84105

המחלקה למתמטיקה

בוחן בקורס מבוא לאלגברה ליניארית

- פתרון -

תאריך הבוחן: 6.12.02
שם המורים: פרופ' אמנון יקותיאלי, פרופ' גריגורי משביצקי, ד"ר אפרים גורביץ', מר עמיחי מנוחין
מס' קורס 201-1-9041
שנה: תשס"ג 2002/3 סמסטר: א'
משך הבוחן: 1 שעה
חומר עזר: מחשבון פשוט

הנחיות:

- **נא לרשום את שמך ואת שעת התרגיל על גבי המחברת!**
- ענה על 2 (בדיוק) מתוך 3 השאלות הבאות. כל שאלה שווה 50 נקודות.
- ניתן לצטט משפטים וטענות שהוכחו בכתה.
- נמק והראה את שלבי החישוב (רצוי לבדוק).
- נא לכתוב ברור ונקי!

סימונים: האותיות $\mathbb{R}$ ו־ $\mathbb{Q}$ מייצגות את השדות של המספרים הממשיים והרציונליים בהתאמה.

1. יהי $V := \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, מרחב המטריצות בגודל 2×2 מעל השדה $\mathbb{R}$. נגדיר את W להיות תת־הקבוצה

$$W := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a+b=c+d,\ 3c=a+4d \right\} \subset V .$$

א. הוכח כי W תת־מרחב של V.
ב. מצא בסיס של W.
ג. מצא את המימד של W.

פתרון:

א. הקבוצה W היא קבוצת הפתרונות של מערכת משוואות הומוגנית (שתי משוואות וארבעה משתנים). לכן היא תת מרחב.
ב. ע"י דרוג מוצאים כי

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

בסיס של W.
ג. המימד של W הוא 2.

2. בשאלה זו השדה הוא $\mathbb{Q}$. יהיו W_1 ו־ W_2 שני תת־מרחבים של $\mathbb{Q}^4$. ידוע כי $\dim(W_1) = 2$, $\dim(W_2) = 3$ ו־ $W_1 + W_2 \neq \mathbb{Q}^4$. הוכח כי $W_1 \subset W_2$.

פתרון: נציג שני פתרונות אפשריים.

א. נתון כי $W_1+W_2\neq\mathbb{Q}^4$. לכן

$$\dim(W_1+W_2)<\dim(\mathbb{Q}^4)=4\ .$$

כעת

$$W_2\subset W_1+W_2$$

ולכן מסיקים כי

$$3=\dim(W_2)\le\dim(W_1+W_2)\ .$$

כלומר $\dim(W_1+W_2)=3$. אבל אז בהכרח $W_2=W_1+W_2$. מאחר ש־ $W_1\subset W_1+W_2$ נובע $W_1\subset W_2$.

ב. נתון כי $W_1+W_2\neq\mathbb{Q}^4$. לכן

$$\dim(W_1+W_2)<\dim(\mathbb{Q}^4)=4\ .$$

כעת

$$W_2\subset W_1+W_2$$

ולכן מסיקים כי

$$3=\dim(W_2)\le\dim(W_1+W_2)\ .$$

כלומר $\dim(W_1+W_2)=3$. עתה נשתמש במשפט

$$\dim(W_1+W_2)=\dim(W_1)+\dim(W_2)-\dim(W_1\cap W_2)$$

כדי להסיק ש־ $\dim(W_1\cap W_2)=2$. מאחר ש־ $W_1\cap W_2\subset W_1$ ו־

$$\dim(W_1\cap W_2)=2=\dim(W_1)$$

נובע $W_1\cap W_2=W_1$. לכן $W_1\subset W_2$.

3. בשאלה זו השדה הוא $\mathbb{R}$. עבור סקלר a נגדיר את הוקטורים הבאים במרחב $\mathbb{R}^3$:

$$v_1:=\begin{bmatrix}0\\1\\a\end{bmatrix}\ ,\ v_2:=\begin{bmatrix}a\\0\\1\end{bmatrix}\ ,\ v_3:=\begin{bmatrix}a\\1\\0\end{bmatrix}\ .$$

יהי

$$W:=\mathrm{Sp}(v_1,v_2,v_3)\ .$$

תת־המרחב $W\subset\mathbb{R}^3$ תלוי כמובן בערך של a. עבור כל $a\in\mathbb{R}$ מצא בסיס של W ואת $\dim(W)$.

פתרון: ע״י דרוג המטריצה

$$\begin{bmatrix}0&a&a\\1&0&1\\a&1&0\end{bmatrix}=[v_1,v_2,v_3]$$

מוצאים שיש שני מקרים:

א. $a=0,-1$. כאן $\{v_1,v_2\}$ בסיס של W והמימד הוא 2.

ב. $a\neq0,-1$. כאן $\{v_1,v_2,v_3\}$ בסיס של W והמימד הוא 3.