BEN GURION UNIVERSITY OF THE NEGEV
BE'ER SHEVA 84105, ISRAEL

אוניברסיטת בן גוריון בנגב
באר שבע 84105

פרופ' אמנון יקותיאלי
המחלקה למתמטיקה
12 דצמ' 2005

בוחן בית בקורס אלגברה מתקדמת

נא לעבוד לבד. אפשר לשוחח איתי אם יש שאלות, ואפשר להעזר בספרות. נא להגיש עד תאריך 26.12.05.

1. יהי K שדה, ויהיו L, M שני שדות הרחבה של K. נניח כי $\operatorname{rank}_K L = 3$ ו־ $\operatorname{rank}_K M = 25$. הוכח כי האלגברה $D := L \otimes_K M$ היא שדה. (רמז: יהי $\mathfrak{m}$ אידיאל מקסימלי ב־ D ויהי $\bar{D} := D/\mathfrak{m}$. חשב את $\operatorname{rank}_K \bar{D}$ והשווה ל־ $\operatorname{rank}_K D$.)

2. בשאלה זו x, y, z הם משתנים. יהי p מספר ראשוני, יהי F שדה ממציין p, ויהי $K := F(x)$, שדה הפונקציות הרציונליות מעל השדה F. נגדיר את הפולינום

$$f(y) := y^p - x \in K[y]$$

ואת האלגברה

$$L := K[y]/(f).$$

א. הוכח כי אין ל־ $f(y)$ שורשים ב־ K. (רמז: דומה להוכחה כי $\sqrt{2}$ אירציונלי).

ב. הוכח כי הפולינום $f(y)$ אי־פריק ב־ $K[y]$, ולכן L שדה. (רמז: נניח בשלילה שיש פולינום $g(y)$ ב־ $K[y]$ שמחלק את $f(y)$. נניח כי $g(y)$ מתוקן ומעלתו d, $1 \le d \le p-1$. יהי M שדה הרחבה של K שבו יש ל־ $f(y)$ שורש a. (למשל $M := L/\mathfrak{m}$ ו־ $a := y + \mathfrak{m}$.) אז ב־ $M[y]$ מתקיים $f(y) = (y-a)^p$, ולכן $g(y) = (y-a)^d$. הסק ש־ $a^d \in K$. מצא i שלם כך ש־ $di \equiv 1 \bmod p$, והסק מזה ש־ $a \in K$. אבל זה לא יתכן לפי א'). (השדה L הוא הרחבה purely inseparable של K.)

ג. נגדיר חוג $D := L \otimes_K L$, ונראה אותו כ־ L־אלגברה ע"י ההומורפיזם $L \to D$, $a \mapsto a \otimes 1$. הוכח כי

$$D \cong L[z]/(z^p)$$

כ־ L־אלגברות.

3. יהי A חוג קומוטטיבי, ויהי B A־אלגברה סופית (כלומר B נוצר סופית כ־ A־מודול).

א. הוכח כי כל איבר $b \in B$ הוא שלם מעל A, כלומר בהנתן b יש פולינום מתוקן $f(x) \in A[x]$ כך ש־ $f(b) = 0$. (רמז: נניח $b_1, \ldots, b_n$ יוצרים את B כ־ A־מודול. אפשר לרשום $bb_i = \sum_j a_{i,j} b_j$. השתמש במשפט קיילי־המילטון עבור המטריצה $[a_{i,j}]$. אבל שים לב שאיננו מניחים כאן ש־ B תחום שלמות או שהוא חופשי כ־ A־מודול.)

ב. כעת נניח כי B הוא תחום שלמות וכי $A \subset B$. יהי K שדה השברים של A. הוכח כי ה־ B־אלגברה $L := K \otimes_A B$ היא שדה שברים של B. (רמז: תחילה הראה כי ההומורפיזם $B \to L$, $b \mapsto 1 \otimes b$, הוא חח"ע. אח"כ הראה כי כל איבר ב־ L ניתן לכתוב כ־ ba^{-1} עבור $0 \neq a \in A$ ו־ $b \in B$. לבסוף השתמש בחלק א' כדי להראות שאם $b \neq 0$ אז הוא הפיך ב־ L.)

בהצלחה!