אוניברסיטת בן גוריון בנגב
באר שבע 84105

BEN GURION UNIVERSITY OF THE NEGEV
BE'ER SHEVA 84105, ISRAEL

המחלקה למתמטיקה

בחינת גמר בקורס מבוא לאלגברה ליניארית

תאריך הבחינה: 30.1.06
שם המורה: פרופ' אמנון יקותיאלי
מס' קורס 201-1-9041
שנה: תשס"ו 2005/6 סמסטר: א' מועד: א'
משך הבחינה: 2 שעות
חומר עזר: מחשבון פשוט [השאלון לפרסום]

הנחיות:

- ענה על 4 (בדיוק) מתוך 5 השאלות הבאות. כל שאלה שווה 25 נקודות.
- ניתן לצטט משפטים וטענות שהוכחו בכתה.
- נמק והראה את שלבי החישוב (רצוי לבדוק).
- נא לכתוב ברור ונקי!

סימונים: האותיות $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ו־ $\mathbb{C}$ מייצגות את השדות של המספרים הרציונליים, הממשיים והמרוכבים בהתאמה. הביטוי $\mathrm{M}_{m\times n}(F)$ מסמן את מרחב המטריצות בגודל $m \times n$ מעל השדה F, ו־ F^n הינו מרחב העמודות בגובה n. האותיות O ו־ I מסמנות את מטריצות (או את טרנספורמציות) האפס והיחידה בהתאמה. עבור טרנספורמציה ליניארית $T : V \to W$ הביטויים $\mathrm{Im}(T)$ ו־ $\mathrm{Ker}(T)$ מסמנים את התמונה והגרעין בהתאמה. הביטוי $\vec{e}_i$ מסמן את הוקטור ב־ F^n שהרכיב ה־ i שלו 1 ויתר הרכיבים הם 0. עבור פולינום $f(x)$ מעל $\mathbb{R}$ הביטויים $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$ וכו' מסמנים את הנגזרות של f.

1. יהי V מרחב הפולינומים $f(x)$ ממעלה ≥ 3 מעל השדה $\mathbb{R}$. נגדיר פונקציה $T : V \to V$ ע"י הנוסחה

$$T(f) := \frac{\mathrm{d}(xf)}{\mathrm{d}x} - 2f .$$

א. הוכח כי T אופרטור ליניארי.
ב. מצא את המטריצה $[T]_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}}$ המייצגת את T ביחס לבסיס הסדור $\mathbf{v} := (1, x, x^2, x^3)$.
ג. האם T אופרטור הפיך? הסבר.
ד. מצא בסיסים של המרחבים $\mathrm{Im}(T)$ ו־ $\mathrm{Ker}(T)$ וחשב את המימדים שלהם.

2. נתונה טרנספורמציה ליניארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ מעל השדה $\mathbb{R}$ המקיימת

$$T(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix})=T(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix})=T(\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}8\\9\end{bmatrix}.$$

א. מצא את המטריצה $[T]_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}}$ המייצגת את T ביחס לבסיסים הסטנדרטיים $\mathbf{v}:=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ ו־ $\mathbf{w}:=(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ של $\mathbb{R}^3$ ו־ $\mathbb{R}^2$ בהתאמה.

ב. מצא בסיסים של המרחבים $\mathrm{Im}(T)$ ו־ $\mathrm{Ker}(T)$ וחשב את המימדים שלהם.

ג. נגדיר בסיס סדור חדש

$$\mathbf{u}:=(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix})$$

של $\mathbb{R}^3$. מצא את המטריצה $[T]_{\mathbf{w}}^{\mathbf{u}}$.

3. נתונה המטריצה $A:=\begin{bmatrix}3&3\\3&3\end{bmatrix}$ מעל השדה $\mathbb{Q}$.

א. מצא את הפולינום האופייני $p_A(x)$.

ב. לכסן את A; כלומר מצא מטריצה הפיכה P עם רכיבים ב־ $\mathbb{Q}$ כך ש־ $P^{-1}AP$ אלכסונית.

ג. פתור את המשוואה $X^2=\frac{1}{6}A$ ב־ $\mathrm{M}_{3\times3}(\mathbb{Q})$ (מצא לפחות פתרון אחד).

ד. חשב את המטריצה $(A+I)^{-100}\cdot A^{50}$.

4. בשאלה זו השדה הוא $\mathbb{R}$ ו־

$$V:=\{\text{ פולינומים } f(x) \text{ ממעלה } \geq 3 \text{ עם מקדמים ב־ } \mathbb{R}\ \}.$$

נגדיר טרנספורמציה ליניארית $T:V\to\mathbb{R}^2$ ע״י הנוסחה

$$T(f):=\begin{bmatrix}f(-1)\\f(-2)\end{bmatrix}.$$

א. מצא את המטריצה $[T]_{\mathbf{e}}^{\mathbf{v}}$ המייצגת את T ביחס לבסיסים הסדורים $\mathbf{v}:=(1,x,x^2,x^3)$ ו־ $\mathbf{e}:=(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ של V ו־ $\mathbb{R}^2$ בהתאמה.

ג. מצא בסיס של $W:=\mathrm{Ker}(T)$.

ד. נגדיר $U:=\mathrm{Sp}(x,x^2,x^3)\subset V$. מצא בסיס של המרחב $U\cap W$.

5. יהיו V ו־ W מרחבים וקטוריים סוף מימדיים מעל שדה F, ותהי $T:V\to W$ טרנספורמציה ליניארית. נתון כי $\dim(\mathrm{Ker}(T))=3$ ו־ $\dim(W)=8$. הוכח כי $\dim(V)\leq 20$.

בהצלחה!