BEN GURION UNIVERSITY OF THE NEGEV
BE'ER SHEVA 84105, ISRAEL

אוניברסיטת בן גוריון בנגב
באר שבע 84105

המחלקה למתמטיקה

בחינת גמר בקורס מבוא לאלגברה ליניארית

תאריך הבחינה: 21.2.06
שם המורה: פרופ' אמנון יקותיאלי
מס' קורס 201-1-9041
שנה: תשס"ו 2005/6 סמסטר: א' מועד: ב'
משך הבחינה: 2 שעות
חומר עזר: מחשבון פשוט [השאלון לפרסום]

הנחיות:

- ענה על 4 (בדיוק) מתוך 5 השאלות הבאות. כל שאלה שווה 25 נקודות.
- ניתן לצטט משפטים וטענות שהוכחו בכתה.
- נמק והראה את שלבי החישוב (רצוי לבדוק).
- נא לכתוב ברור ונקי!

סימונים: האותיות $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ו־ $\mathbb{C}$ מייצגות את השדות של המספרים הרציונליים, הממשיים והמרוכבים בהתאמה. הביטוי $\mathrm{M}_{m\times n}(F)$ מסמן את מרחב המטריצות בגודל $m \times n$ מעל השדה F, ו־ F^n הינו מרחב העמודות בגובה n. האותיות O ו־ I מסמנות את מטריצות (או את טרנספורמציות) האפס והיחידה בהתאמה. עבור טרנספורמציה ליניארית $T : V \to W$ הביטויים $\mathrm{Im}(T)$ ו־ $\mathrm{Ker}(T)$ מסמנים את התמונה והגרעין בהתאמה. הביטוי $\vec{e}_i$ מסמן את הוקטור ב־ F^n שהרכיב ה־ i שלו 1 ויתר הרכיבים הם 0. עבור פולינום $f(x)$ מעל $\mathbb{R}$ הביטויים $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}$ וכו' מסמנים את הנגזרות של f.

1. בשאלה זו השדה הוא $\mathbb{R}$ ו־ V הוא המרחב הוקטורי

$$V := \{\text{ פולינומים } f(x) \text{ ממעלה } \geq 2 \text{ עם מקדמים ב־ } \mathbb{R} \text{ }\}.$$

נגדיר טרנספורמציה ליניארית $T : V \to \mathbb{R}^3$ ע"י הנוסחה

$$T(f) := \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \end{bmatrix}.$$

א. מצא את המטריצה $[T]_{\mathbf{e}}^{\mathbf{v}}$ המייצגת את T ביחס לבסיסים הסדורים $\mathbf{v} := (1, x, x^2)$ ו־ $\mathbf{e} := (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ של V ו־ $\mathbb{R}^3$ בהתאמה.

ב. השתמש ב־ א' כדי למצוא פולינום $f(x)$ ב־ V כך ש־ $f(0) = 8$, $f(1) = 9$ ו־ $f(2) = 11$.

ג. האם יש פולינום $g(x)$ ב־ V כך ש־ $g(0) = 8$, $g(1) = 9$, $g(2) = 11$ ו־ $g(4) = 0$? אם כן מצא כזה פולינום; אם לא נמק.

2. נתונה המטריצה $A := \begin{bmatrix} -17 & 9 \\ -54 & 28 \end{bmatrix}$ מעל השדה $\mathbb{R}$.

א. לכסן את A; כלומר מצא מטריצה הפיכה P עם רכיבים ב־ $\mathbb{R}$ כך ש־ $P^{-1}AP$ אלכסונית.
ב. חשב את המטריצה A^{100}.
ג. פתור את המשוואה $X^2 + I = A$ ב־ $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (מצא לפחות פתרון אחד).

3. יהי V מרחב הפולינומים $f(y)$ ממעלה ≥ 2 מעל השדה $\mathbb{R}$. נגדיר פונקציה $T : V \to V$ ע״י הנוסחה

$$T(f) := (2y+1)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}.$$

א. הוכח כי T אופרטור ליניארי.
ב. מצא את המטריצה $[T]_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}}$ המייצגת את T ביחס לבסיס הסדור $\mathbf{v} := (1, y, y^2)$.
ג. חשב את הפולינום האופייני $p_T(x)$ ואת הערכים העצמיים של T.
ד. האם T ניתן לליכסון? נמק.

4. נתון אופרטור ליניארי $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ מעל השדה $\mathbb{R}$ המקיים $T(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ו־ $T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

א. מצא את המטריצה $[T]_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}}$ המייצגת את T ביחס לבסיס הסטנדרטי $\mathbf{e} := (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
ב. חשב את המטריצה A^{-1}.
ג. מצא וקטור u כך ש־ $T(u) = \vec{e}_1$.
ד. מצא וקטור w כך ש־ $T^2(w) = \vec{e}_1$.

5. נתונה המטריצה $A := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ מעל השדה $\mathbb{C}$.

א. מצא את הערכים העצמיים של A.
ב. לכל ערך עצמי λ מצא את הוקטורים העצמיים השייכים לו.
ג. האם A ניתנת לליכסון?

בהצלחה!