ধরুন আমরা জানি S, যেহেতু এটা A এর M_S প্রজেকশন বিধায় তাহলে A M এর A_S প্রজেকশনের মধ্যে আমরা একটা সম্পর্ক বের করতে পারি যেটা হচ্ছে এর $M \times S$ এবং $(m_1, s_1) \to (m_2, s_2)$ এলিমেন্টগুলো $s_1 m_2 - s_2 m_1 = 0$ এর B এর প্রজেকশন $\frac{m}{s}$ এবং (m, s) কে কিভাবে $M_S := M \times S / \sim$ এর মধ্যে দিয়ে প্রকাশ করা যায়

$$\frac{m_1}{s_1} + \frac{m_2}{s_2} := \frac{m_1 s_2 + m_2 s_1}{s_1 s_2}$$

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{m}{t} := \frac{am}{st}$$

এখন M_S কে A-মডিউল এবং প্রজেকশন A_S হোম M_S দিয়ে

প্রজেকশন A_S R প্রজেকশনের (1) এবং (2) এবং এবং $M_S \cong A_S \otimes_A M$

$$\frac{am}{s} \longleftrightarrow \frac{a}{s} \otimes m$$

প্রজেকশন A R এর মধ্যে সংযুক্তিকরণ সংক্রান্ত প্রমাণ করুন

$$A_S * M \to M_S$$

$$\left(\frac{a}{s}, m\right) \mapsto \frac{a}{s} \cdot m = \frac{am}{s}$$

$\varphi: A_S \otimes_A M \to M_S$ হচ্ছে A-এর R এর মধ্যে মডিউল হোমোমর্ফিজম

$\psi: M_S \to A_S \otimes_A M$ এবং এটা হচ্ছে এর বিপরীত

$$\psi\left(\frac{m}{s}\right) := \frac{1}{s} \otimes m$$

প্রমাণটি সহজ এবং, এখানে একটা জিনিস $\frac{m_1}{s_1} = \frac{m_2}{s_2}$ এর মধ্যে $s(m_1 s_2 - m_2 s_1) = 0$

$$s \cdot s_2\left(\frac{1}{s_1} \otimes m_1 - \frac{1}{s_2} \otimes m_2\right) =$$

প্রমাণ করে s এর

$$= r\left(\frac{s_1}{s_1}\otimes s_2 m_1 - \frac{s_2}{s_2}\otimes s_1 m_2\right)$$

$$= 1\otimes r(s_2 m_1 - s_1 m_2) = 0$$

(ধাপ ৮ এর $\frac{1}{s_1 s_2}$ দ্বারা গুণ করে)

$$\frac{1}{s_1}\otimes m_1 = \frac{1}{s_2}\otimes m_2$$

অর্থাৎ φ এ A-মডিউলের উপর, φ সংজ্ঞা, φ একটি

$$\varphi\left(\frac{a'}{s'}\cdot\left(\frac{a}{s}\otimes m\right)\right) =$$

ফিরে এবার দেখি

$$\varphi\left(\frac{a'a}{s's}\otimes m\right) = \frac{a'am}{s's} = \frac{a'}{s'}\cdot\frac{am}{s} = \frac{a'}{s'}\varphi\left(\frac{a}{s}\otimes m\right)$$

যেহেতু a' যে কোনো A_S-উপাদান হতে পারে, তাই

$\square$

(৩) প্রমাণ করি $\varphi: M \to M_S$, $\varphi(m) = \frac{m}{1}$ এর কার্নেল হবে

$$\{m\in M \mid \exists s\in S \text{ যার জন্য } sm=0\}$$

কারণ $\frac{m}{1} = 0 = \frac{0}{1} \iff \exists s\in S$ যেন $sm=0$ এবং

<u>প্রমাণ</u>: A-মডিউল A_S এবং $\underline{\text{ফ্ল্যাট}}$ $\underline{\text{মডিউল}}$

$\square$ ফ্ল্যাট মানে $\varphi: M \hookrightarrow N$ এর $\underline{\text{ক্রমটি}}$

ফ্ল্যাট $1\otimes\varphi: A_S\otimes_A M \to A_S\otimes_A N$ এও

$\varphi_S: M_S \to N_S$ একটি $\underline{\text{মনোমর্ফিজম}}$

$M_S \cong A_S\otimes_A M$ (আমরা পূর্বেই দেখিয়েছি)

$N_S \cong A_S\otimes_A N$

$$\varphi_S\left(\frac{m}{s}\right) = (1\otimes\varphi)\left(\frac{1}{s}\otimes m\right) = \frac{1}{s}\otimes\varphi(m) = \frac{\varphi(m)}{s}$$

এখন φ_S এর কার্নেল

$$\frac{0}{1} = 0 = \varphi_S\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{\varphi(m)}{s} \quad \text{হলে } \frac{m}{s}\in \operatorname{Ker}(\varphi_S)$$

অর্থাৎ $\varphi(m) = 0$ এবং $s\in S$ এবং $\varphi(m)=0$ এবং φ মনোমর্ফিজম

$\Leftarrow$ $\varphi(m)=0$ এবং $s\in S$ এবং $m=0$

$\mathbb{Z}$ $\frac{m}{2}=0$ $\Leftarrow$ $2m=0$

הגדרה: מודול

A חוג, M מודול-A ו- B חוג-A.

$B\otimes_A M$ הוא מודול-A ו- B -מודול.

אם $0\to N'\xrightarrow{\varphi}N$ מד. אמיתית ו- B חוג-A אז

$$0\to (B\otimes_A M)\otimes_A N' \xrightarrow{1\otimes\varphi} (B\otimes_A M)\otimes_B N$$

$(B\otimes_A M)\otimes_B N \cong M\otimes_A N$ איזומורפיזם. אמיתי

לפי תכונת האוניברסלית $(b\otimes m)\otimes n\mapsto m\otimes bn$ ש

$$\begin{cases} B\times M\times N\to M\otimes_A N \\ (b,m,n)\mapsto m\otimes bn \end{cases}$$ מולטי-לינארי

$$\begin{cases} M\times N\to (B\otimes_A M)\otimes_B N \\ (m,n)\mapsto (1\otimes m)\otimes n \end{cases}$$ מולטי-לינארי

לפי GO מתקיים דיאגרמה אמיתית

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (B\otimes_A M)\otimes_A N' \arrow[r, "1\otimes\varphi"] \arrow[d, "\cong"] \arrow[dl, "="'] & (B\otimes_A M)\otimes_B M \arrow[d, "\cong"] \\
0 \arrow[r] & M\otimes_A N' \arrow[r, "1\otimes\varphi"] & M\otimes_A N
\end{tikzcd}$$

מהלמה, אם, מעל חוג A ל- M יש

הטלה אינפיניטי הטלה

$M_{\mathbb{R}}=A_{\mathbb{R}}\otimes_A M$ (מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ו- A חוג) אז יש

প্রমাণ: M - সান্ত A-মডিউল। তাহলে

প্রতিপাদ্য: $M=0$ (i) $\Leftrightarrow$ $M_{\mathfrak{p}}=0$ (ii) $\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$

(i) $\Rightarrow$ (ii) স্পষ্ট।

(ii) $\Rightarrow$ (i): $M_{\mathfrak{p}}=0$ মানে $M \neq 0$ হলে $M \ni m \neq 0$ থাকে। ফিল্টারিং লিমিট N এর গেনারেটর m হলে $N \neq 0$ এবং $N = Am \subset M$। আবার $N_{\mathfrak{p}} \subset M_{\mathfrak{p}}$ প্রতিটি $\mathfrak{p}$ এর জন্য। কিন্তু $N_{\mathfrak{p}} \neq 0$ যদি $\mathfrak{p}$ কোনো প্রাইম হয়। $N \cong A/I$ যেখানে $I = \{a \in A \mid am = 0\}$। $\mathfrak{p}$ যদি I এর মিনিমাল প্রাইম হয়, তাহলে $N \to A/I \twoheadrightarrow A/\mathfrak{p}$ থেকে $N_{\mathfrak{p}} \twoheadrightarrow (A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}}$ আবার $(A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} \cong A/\mathfrak{p}$ বলে $(A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} \neq 0$।

এখন $A \supset \mathfrak{p}$ এর জন্য $A/\mathfrak{p}$ এর $(A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}} \otimes_A (A/\mathfrak{p})$ প্রদান করে। $A/\mathfrak{p} \to A_{\mathfrak{p}} \otimes_A A/\mathfrak{p}$ নিয়ে আলোচনা। $S = A - \mathfrak{p}$ হলে $S^{-1}A = A_{\mathfrak{p}}$ এবং $S^{-1}(A/\mathfrak{p}) = A_{\mathfrak{p}} \otimes_A A/\mathfrak{p}$। S^{-1} ফাংটর $\mathfrak{p}$ এর বাইরে $\mathfrak{p}$ এর সাথে কাজ করে, সেজন্য $A_{\mathfrak{p}} \otimes_A A/\mathfrak{p}$ এর সংজ্ঞা S এর উপর নির্ভর করে না। $S^{-1}\bar{a}$ $\bar{a}$ $\mathfrak{p}$ এর বাইরে

הוכחה. יהי M A-מודול. נראה

שקילות הבאים:

(i) M A-שטוח.

(ii) לכל $\mathfrak{p}$ ב A מקסימלי המודול $M_{\mathfrak{p}}$ $A_{\mathfrak{p}}$-שטוח.

(iii) לכל $\mathfrak{m}$ מקס'.

3 שקולים כי (ii) $\Leftarrow$ (i) ברור.

(iii) $\Leftarrow$ (i): יהי $0 \to N' \xrightarrow{\varphi} N$ מדויק. נראה

$$P := \operatorname{Ker}(1 \otimes_M \varphi)$$

מדויק

$$0 \to P \to M \otimes_A N' \xrightarrow{1 \otimes \varphi} M \otimes_A N$$

מדויק

$0 = P_{\mathfrak{m}}$ לכל $\mathfrak{m}$ מקס'. 4 שקולים כי $P = 0$ אם

לוקאלי $\mathfrak{m}$ לכל

מקס' $\mathfrak{m}$ אם

לוקאלי $\mathfrak{m}$ לכל

$$0 \to A_{\mathfrak{m}} \otimes_A P \to A_{\mathfrak{m}} \otimes_A (M \otimes_A N') \to A_{\mathfrak{m}} \otimes_A (M \otimes_A N)$$

$$\begin{tikzcd}
 & M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} N'_{\mathfrak{p}} \arrow[r] & M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}}
\end{tikzcd}$$

מקומי

$\mathfrak{p}$ מקס' $\mathfrak{m}$ $\Leftarrow$ $\mathfrak{p}$ מקס' $\mathfrak{m}$ $\Leftarrow$ $\mathfrak{p}$ מקס' $\mathfrak{m}$ $\Leftarrow$ $\mathfrak{p}$ מקס' $\mathfrak{m}$ $\Leftarrow$ $\mathfrak{p}$ מקס' $\mathfrak{m}$

$0 = A_{\mathfrak{m}} \otimes_A P = P_{\mathfrak{m}}$ לכל $\mathfrak{m}$ מקס' $\Leftarrow$ $M_{\mathfrak{p}}$ שטוח.

$\square$

תז 27
12.12

$$B \otimes_A (M \otimes_A N) \cong (B \otimes_A M) \otimes_B (B \otimes_A N)$$

$\in$ מרחב וקטורי מעל $A \to B$ שטוח מקומי

$b \otimes (m \otimes n) \leftrightarrow (b \otimes m) \otimes (1 \otimes n) = (1 \otimes m) \otimes (b \otimes n)$

מרחב וקטורי A מעל M ו N מרחבי וקטורים

$\square$ מתרגיל