הרצאה 12

יריעות דיפרנציאביליות

פרק אחרון.

תהי X יריעה דו׳, עם אלומת הנבטים $\mathcal{O}_X$.
אם U קבוצה פתוחה ב- X, אז $(U, \mathcal{O}_X|_U)$
הינה יריעה דיפרנציאבילית (מאותו מימד כמו X). לבדוק
קוראים ל- $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ תת יריעה פתוחה.

המושג של תת יריעה סגורה יותר מורכב פה.
ניקח $Z \subset X$ תת קבוצה סגורה, ונתבונן במרחב עם פונקציות $(Z, \mathcal{O}_X|_Z)$. מתי Z תת יריעה סגורה? יש שני תנאים:

(1) $(Z, \mathcal{O}_X|_Z)$ יריעה דיפרנציאבילית, כלומר: כלומר יש אטלס דו׳ על המרחב הטופולוגי Z, אשר מגדיר אלומת פונקציות $\mathcal{O}_Z$, וצריך $\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_X|_Z$.

(2) ~~[illegible]~~ אולם (?!) צריך תנאי נוסף: ההכלה היא אימרסיה (immersion) [illegible] של $Z \to X$. (לא הכרחי [illegible];
בספרות (בגיאומטריה אלגברית התנאי הזה אוטומטי;
ראה: Hartshorne, Thm. I.5.1)

37.1

כזכור יש פונקטור מלא ונאמן

$F: \underline{Mfld}(\mathbb{R}, C^\infty) \longrightarrow \underline{Sp}(\mathbb{R})$.

איך נזהה את התמונה של F, כלומר את תת-הקטגוריה המלאה של $\underline{Sp}(\mathbb{R})$, של האובייקטים $(X, \mathcal{O}_X)$ אשר הינם איזומורפיים ליריעות דיפרנציאביליות?

תרגיל. יהי $(X, \mathcal{O}_X)$ אובייקט ב- $\underline{Sp}(\mathbb{R})$. הוכח:

$(X, \mathcal{O}_X)$ הוא איזומורפי ליריעה דיפרנציאבילית אמ"מ מתקיימים התנאים הבאים:

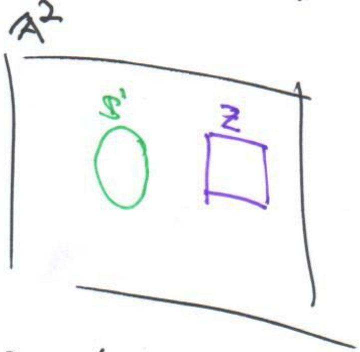
(i) ישנו כיסוי פתוח $\{U_i\}$ של X, כך שלכל i האובייקט $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ איזומורפי (כאובייקט של $\underline{Sp}(\mathbb{R})$) לאובייקט $(W_i, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}|_{W_i})$, עבור איזו קבוצה פתוחה $W_i \subset \mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$.

(ii) המרחב הטופולוגי X הוא האוסדורף ויש לו בסיס בן מניה של הטופולוגיה.

לדלג

<u>תרגיל</u> (קצת הלכה; קשה; אפשר לדלג על זה מחוץ להרצאה:)

ניקח את היריעה הדיפ' $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, עם אלומת הפונ' הדיפ' $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}$. יהיו S^1 ו- Z המעגל והריבוע בתוך $\mathbb{A}^2$:



ראינו כבר כי $(S^1, \mathcal{O}_{S^1}) \cong (S^1, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}|_{S^1})$ בקטגוריה $\underline{\mathsf{Sp}}(\mathbb{R})$ (זה היה תרגיל בזמן). כאן $\mathcal{O}_{S^1}$ היא אלומת הפונ' הדיפ' על S^1 כרגיל כיריעה דיפרנציאבילית. (S^1 תת-יריעה סגורה של $\mathbb{A}^2$).

נתבונן באופן דומה גם במרחב $(Z, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}|_Z)$.

זה איננו יריעה דיפ'... אבל למה?

<u>תרגיל</u>: להוכיח כי $(S^1, \mathcal{O}_{S^1})$ ו- $(Z, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}|_Z)$ <u>אינם</u> איזומורפיים בקטגוריה $\underline{\mathsf{Sp}}(\mathbb{R})$.

לחלופין (זה יותר חזק): להוכיח כי המרחב $(Z, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}|_Z)$ <u>איננו</u> יריעה דיפ' (כלומר אין אטלס דיפ' על Z אשר האלומה שהוא מגדיר שווה ל- $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}|_Z$).