15

הערה. נשוב להעתקה לעיל במקרה $i=0$.

ראינו $f_0: U_0 \to \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$

היא $f_0(a_0:a_1:\dots:a_n) = \left(\frac{a_1}{a_0},\dots,\frac{a_n}{a_0}\right)$,

כאשר ה-$(n+1)$-יה $(a_0,\dots,a_n)$ מייצגת את

כך שלכל $\lambda\neq 0$. מתקיים $\lambda a_0\neq 0$ הרי a_j/a_0

מייצג, לכן: $\frac{a_j}{a_0} = \frac{\lambda a_j}{\lambda a_0}$. עבור $\lambda\neq 0$.

$\boxed{\text{מכפלה}}$ $\boxed{\text{מצטמצם}}$

נראה פי' חח"ע ועל, כי להעתקה ההפוך יש

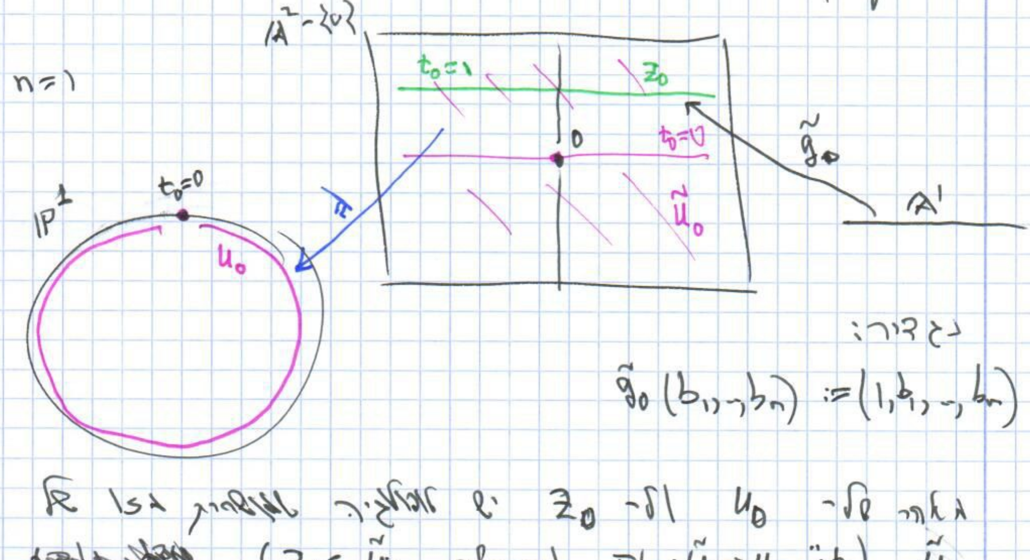
$g_0: (b_1,\dots,b_n) \mapsto (1:b_1:\dots:b_n)$

נגדיר

$Z_0 := \{(1,b_1,\dots,b_n)\} \subset \mathbb{A}^{n+1}-\{0\}$

אז $\tilde{U}_0 \supset Z_0$, ו- $\pi|_{Z_0}: Z_0 \to U_0$

חח"ע ועל.



נגדיר:

$\tilde{g}_0(b_1,\dots,b_n) := (1,b_1,\dots,b_n)$

גם אחר של- U_0 ול- Z_0 יש חוקיות מעברים, בגלל של $\tilde{U}_0$ (כי: $\pi|_{\tilde{U}_0}: \tilde{U}_0 \to U_0$ והקרנה $Z_0 \subset \tilde{U}_0$), ~~[illegible]~~

$\pi|_{Z_0}: Z_0 \to U_0$ היא הומ'.

בדיקה נזכרה מראש.

מצאנו ש- $\tilde{g}_0 : \mathbb{A}^1(\mathbb{R}) \to Z_0$

רציפה הפיכה. ו- $g_0 = \pi|_{Z_0} \circ \tilde{g}_0$.

כלומר ש- g_0 רציפה; ו- $g_0 = f_0^{-1}$.

$\square$

(16.1)

טענה תהא i,j נסמן ב:

$$f_{i,j}: f_i(U_i\cap U_j)\to f_j(U_i\cap U_j)$$

ויהי פונקציית המוגדרת. אז $f_{i,j}$ הינו דיפאו-
מורפיזם.

הוכחה.

תחילה נחשב מהי הקבוצה הפתוחה

$$W_{i,j}:=f_{i,j}(U_i\cap U_j)\subset \mathbb{A}^n(\mathbb{R}).$$

ניקח $x=(a_0:\dots:a_n)\in U_i\cap U_j$.

אז $a_i\neq 0$ וגם $a_j\neq 0$. כך ש-

$$f_i(x)=\left(\frac{a_0}{a_i},\dots,\cancel{\frac{a_i}{a_i}},\dots,\frac{a_n}{a_i}\right)=:(b_1,\dots,b_n)$$

לשם הפשטות נניח כי $i=0$, ו- $j=1$.

אז

$$(b_1,\dots,b_n)=\left(\frac{a_1}{a_0},\dots,\frac{a_n}{a_0}\right)$$

רואים ש:

$$\boxed{W_{0,1}=\{(b_1,\dots,b_n)\mid b_1\neq 0\}}$$

בדומה

$$f_1(x)=\left(\frac{a_0}{a_1},\frac{a_2}{a_1},\dots,\frac{a_n}{a_1}\right)=:(c_1,\dots,c_n)$$

ולכן

$$\boxed{W_{1,0}=\{(c_1,\dots,c_n)\mid c_1\neq 0\}}.$$

$\frac{a_k}{a_1}=\frac{a_k}{a_0}\cdot\frac{a_0}{a_1}$

הנוסחה ל- $f_{0,1}$ היא:

$$\boxed{f_{0,1}(b_1,\dots,b_n)=\left(\frac{1}{b_1},\frac{b_2}{b_1},\dots,\frac{b_n}{b_1}\right)}$$

(6.2)

רואים כי $f_{0,1}$ הוא דיפאומורפיזם.

II

<u>הגדרה</u> ($\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ כיריעה דיפרנציאבילית)
היא יריעה דיפרנציאבילית עם $\{(U_i,f_i)\}_{i=0}^{n}$
כפי שהוגדרו קודם.

<u>דוגמה</u>: ① יהי $Z := \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - U_0$.

זוהי קבוצה סגורה, שמוגדרת ע"י קבוצת האפסים

$$Z = \{x \in \mathbb{P}^n \mid t_0(x) = 0\}$$

לכן

$$Z = \{(a_0 : \dots : a_n) \mid a_0 = 0\}$$

$$= \{(0 : a_1 : \dots : a_n)\} \cong \{(a_1 : \dots : a_n)\}$$

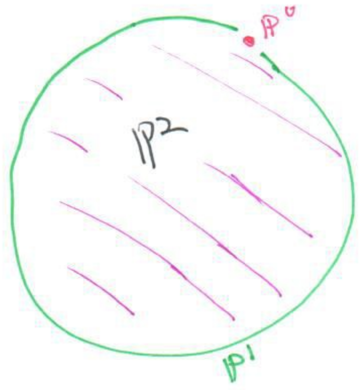
$$= \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$$

$Z \cong \mathbb{P}^{n-1}$

הדבר קודם מוכח כ-
באופן טופולוגי, כי הפונקציה $g : \mathbb{P}^{n-1} \to \mathbb{P}^n$
שמוגדרת ע"י $g(a_1 : \dots : a_n) := (0 : a_1 : \dots : a_n)$
היא [illegible] דיפרנציאבילית (כמובן) ברור שגם [illegible] סגורה של
ורואים: אם כן יש שרשרת תתי-יריעות

$$\mathbb{P}^0 = \{נקודה\} \subset \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^2 \subset \dots \mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$$

$$\mathbb{A}^n \cong U_0 \subset \mathbb{P}^n$$



הערה 2. פונקציות המעבר ע"י f_{ij} בעולם
של $\mathbb{P}^n$ הן אלגבריות (מנות של פולינומים).
בהמשך נשתמש בקונסטרוקציה זאת כדי להגדיר את
המבנה הפרויקטיבי $\mathbb{P}^n(K)$ כיריעה אלגברית
(K שדה סגור אלגברית).

יריעות אנליטיות מרוכבות

כמו במקרה של משתנה אחד פונקציה

$f: U \to \mathbb{C}^n$, $U \subset \mathbb{C}^m$ פתוחה,

היא **גזירה** שקול **אנליטית**: לכל a נקודה

אם U יש סביבה פתוחה שבה טור טיילור

של f מתכנס לפונקציה f בתחום ובמידה שווה.

שם אחר לפונקציה אנליטית מרוכבת הוא **פונקציה הולומורפית**.

אטלס אנליטי: יהי X מרחב טופולוגי.

אטלס מרוכב אנליטי ממימד n על X הוא אטלס

$\mathcal{A} = \{(U_i, f_i)\}$ שבו $f_i: U_i \to W_i$

הומיאומורפיזם, ו- W_i קבוצות פתוחות ב- $\mathbb{C}^n$.

פונקציות ההדבקה $f_{ij}: \underset{\mathbb{C}^n}{f_i(U_i \cap U_j)} \to \underset{\mathbb{C}^n}{f_j(U_i \cap U_j)}$

הן דיפאומורפיזם **אנליטיים**.

נשים לב שהמימד הטופולוגי של X

הוא $2n$.

העתקה אנליטית $f: (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$: כמו במקרה

הממשי הרגיל, רק כאן דרך פונקציות אנליטיות...

יהי $\mathbb{K}$ שדה כלשהו. כמו במקרה של $\mathbb{R}$,
מגדירים את המרחב $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ כאוסף המנה של $\mathbb{K}^{n+1}-\{0\}$,
מודולו הפעולה של החבורה הכפלית $\mathbb{K}^\times$.

נתמקד במקרה $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. כאן יש לקבוצה
$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ טופולוגיה מושרית מ- $\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}$, ולכן
מרחב מטרי קומפקטי. לדוגמה, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$
הומאומורפי ל- S^2; והעתק הקלאסי הוא הספירה
של רימן.

הכיסוי הפתוח $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})=\bigcup_{i=0}^n U_i$ כמו קודם
הם הומאומורפיזמים $f_i: U_i\longrightarrow\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$. פונקציות
המעבר $f_{i,j}$ הן דיפאומורפיזמים אנליטיים
(כולל המשפט שעשינו עבור $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$). כך הקבוצה
$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ הופכת ליריעה אנליטית מרוכבת.

כמו במקרה היחיד $n=1$, הפונקציות
ההולומורפיות $f:\mathbb{P}^n(\mathbb{C})\to\mathbb{C}$ הן הפונקציות הקבועות.

קטגוריות ופונקטורים

נרצה לציין מה את הרעיון, כדי לדבר על משהו כללי יותר.

<u>הגדרה</u>. <u>קטגוריה</u> $\underline{C}$ היא מבנה שמורכב מקבוצה $Ob(\underline{C})$, שנקראת קבוצת <u>האובייקטים</u> של $\underline{C}$; מאוסף קבוצות $Hom_{\underline{C}}(c_0,c_1)$ לכל זוג אובייקטים c_0 ו-c_1, שנקראות קבוצת <u>המורפיזמים</u>; מפונקציה

$$Hom_{\underline{C}}(c_0,c_1)\times Hom_{\underline{C}}(c_1,c_2)\xrightarrow{\circ} Hom_{\underline{C}}(c_0,c_2)$$

פונקציה

שנקראת <u>הרכבה</u>; ומורפיזם מיוחד 1_c ב-$Hom_{\underline{C}}(c,c)$ שנקרא <u>מורפיזם הזהות</u>.

לכל אובייקט c

האקסיומות הן: ההרכבה היא אסוציאטיבית, מורפיזם הזהות מקיים

$$f\circ 1_c = 1_D\circ f = f$$

לכל $f\in Hom_{\underline{C}}(C,D)$.

הערה לגבי תורת הקבוצות: אנו נתעלם בקורס מסוגיות אלו. יש כמה פתרונות בספרות לבעיות מסוג "פרדוקס ראסל" שצצות פה. שניים מהם:

1) הבחנה בין קבוצות למחלקות. $Ob(\underline{C})$ מחלקה, $Hom_{\underline{C}}(-,-)$ קבוצה

2) הבחנה בין קבוצות קטנות לגדולות, אפשר שימוש ב- universes (גרותנדיק).

$ob(\underline{C})$ ... קבוצה גדולה

$Hom_{\underline{C}}(C,D)$ ... קבוצה קטנה

דוגמאות

א) הקטגוריה <u>Set</u> של הקבוצות. האובייקטים הם הקבוצות. המורפיזמים הם הפונקציות $f: S_0 \to S_1$. מורפיזם הזהות 1_S הוא פונקציית הזהות. ההרכבה היא ההרכבה הרגילה.

ב) יהי A חוג קומוטטיבי ונסמן ב- <u>Mod</u> A את הקטגוריה של ה- A-מודולים. המורפיזמים הם ההומומורפיזמים $\varphi: M_1 \to M_2$ של A-מודולים.

ג) הקטגוריה $\underline{Top}$ של המרחבים הטופולוגיים.
האובייקטים הם המרחבים הטופולוגיים, והמורפיזמים הם הפו' הרציפות $f: X \to Y$.

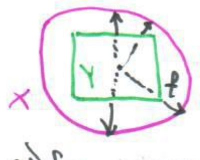
ד) הקטגוריה $\underline{Mfld}(\mathbb{R}, C^\infty)$ של יריעות ממשיות דיפרנציאביליות. האובייקטים הם היריעות (מרחב X עם אטלס נתון A; או מחלקת שקילות של אטלסים). המורפיזמים הם ההעתקות הדיפרנציאביליות.

ה) הקטגוריה $\underline{Mfld}(\mathbb{C})$ של יריעות מרוכבות. האובייקטים הם היריעות האנליטיות המרוכבות. המורפיזמים הם ההעתקות האנליטיות $f: X \to Y$.

עד פה 1/3

מורפיזם $f: C \to D$ בקטגוריה $\mathcal{C}$ נקרא הפיך, או איזומורפיזם, אם יש מורפיזם $g: D \to C$ כך ש- $g \circ f = 1_C$ ו- $f \circ g = 1_D$. המורפיזם ההפכי במקרה זה (כלומר g), הוא יחיד.

דוגמה. X מעגל, Y ריבוע במישור $\mathbb{R}^2 = \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$.
$f: Y \to X$
הפונקציה הרציפה המתוארת בציור.



f הומיאומורפיזם, כלומר f איזומורפיזם בקטגוריה $\underline{Top}$.