$\mathbb{P}^n$ הוא יריעה שלמה

קבוצה $X \subset \mathbb{A}^{n+1}$ נקראת <u>חרוט</u> אם היא [illegible] אינווריאנטית תחת פעולת החבורה הכפלית $\mathbb{k}^\times$.

עבור $\lambda \in \mathbb{k}^\times$ נסמן ב- g_λ את האוטומורפיזם של $\mathbb{A}^{n+1}$ שמוגדר כך: $g_\lambda(x_0,\dots,x_n) := (\lambda x_0,\dots,\lambda x_n)$.

אם כן X חרוט אומר ש- $g_\lambda(X) = X$ לכל $\lambda \in \mathbb{k}^\times$.

נתבונן בהעתקה הקאנונית
$$\pi : \mathbb{A}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{P}^n$$
בהינתן קבוצה סגורה $X \subset \mathbb{P}^n$, <u>החרוט</u> <u>מעל</u> X הוא הקבוצה
$$C(X) := \pi^{-1}(X) \cup \{0\} \subset \mathbb{A}^{n+1}.$$

יהי $\mathfrak{a} \subset \mathbb{k}[t_0,\dots,t_n] = \mathbb{k}[\underline{t}]$ אידיאל הומוגני כך ש- $X = Z_{\mathbb{P}^n}(\mathfrak{a})$.

אז $C(X) = Z_{\mathbb{A}^{n+1}}(\mathfrak{a})$ [כלומר $C(X)$ הוא הסגור ב- $\mathbb{A}^{n+1}$ של $\pi^{-1}(X)$]

כעת תהי Y יריעה אפינית. נגדיר אוטומורפיזם g_λ של $\mathbb{A}^{n+1} \times Y$ ע"י
$$g_\lambda(x_0,\dots,x_n,y) := (\lambda x_0,\dots,\lambda x_n, y).$$

מקבלים אוטומורפיזם g_λ^* של האלגברה

$\mathbb{k}[\underline{t}] \otimes \mathcal{O}_Y(Y)$, כאשר $\mathcal{O}_Y(Y) =: B$

נגדיר דירוג על האלגברה $\mathbb{k}[\underline{t}] \otimes \mathcal{O}_Y(Y)$ כך:

$$\mathbb{k}[\underline{t}] \otimes \mathcal{O}_Y(Y) = \bigoplus_{d \geq 0} \mathbb{k}[\underline{t}]_d \otimes \mathcal{O}_Y(Y).$$

ברור כי g_λ^* שומר את הדירוג.

אידיאל $\mathfrak{a}$ ב- $\mathbb{k}[\underline{t}] \otimes \mathcal{O}_Y(Y)$ יקרא הומוגני אם

$\mathfrak{a} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathfrak{a}_d$, $\mathfrak{a}_d := \mathfrak{a} \cap (\mathbb{k}[\underline{t}]_d \otimes B)$

למה 1. תהי $X \subset \mathbb{A}^{n+1} \times Y$ תת-יריעה סגורה, ותהי

$\mathfrak{a} := I(X) \subset \mathbb{k}[\underline{t}] \otimes B$.

התנאים הבאים שקולים:

(i) $g_\lambda(X) = X$ לכל $\lambda \in \mathbb{k}^\times$ (כלומר X הוא חרוט).

(ii) $g_\lambda^*(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ לכל $\lambda \in \mathbb{k}^\times$.

(iii) $\mathfrak{a}$ אידיאל הומוגני.

הוכחה. נשים לב כי $\mathbb{k}[\underline{t}]_d \otimes A \ni f(\underline{t})$

אזי $g_\lambda^*(f) = \lambda^d f$ לכל $\lambda \in \mathbb{k}^\times$.

148

את השקילות $(\mathrm{ii}) \Leftrightarrow (\mathrm{iii})$ כבר הוכחנו (עבור
$B = \Bbbk$, אבל אין הבדל). די

הגרירה $(\mathrm{i}) \Leftarrow (\mathrm{iii})$ ברורה.

נוכיח $(\mathrm{iii}) \Leftarrow (\mathrm{i})$: ניקח $f \in \mathfrak{a} = I(X)$ ו- $\lambda \in \Bbbk^{\times}$.

לכל $x \in X$ נקבל $g_\lambda^*(f)(x) = f(g_\lambda(x)) = 0$

כי $g_\lambda(x) \in X$. לכן $g_\lambda^*(f) \in \mathfrak{a}$.

כלומר $g_\lambda^*(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$. f שרירותי כי [illegible] תחת g_λ^*.

$\square$

די הטיעון הוא זה: נניח $\deg(f) \le d$.

ניקח $\lambda \in \Bbbk^{\times}$ כך שהאיברים

$1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^d$ שונים. לכל $0 \le i \le d$ יש

אופרטור $\varphi_i \in \Bbbk[g_\lambda^*]$

כך ש- $\varphi_i(f) = f_i$.

כאן $f = \sum_{i=0}^{d} f_i$ הפירוק של f לרכיבים הומוגניים.

אז לכן $\varphi_i(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$, מאחר ש- $g_\lambda^*(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$.

149

טענה 2. תהי $X \subset \mathbb{P}^n \times Y$ תת-יריעה סגורה

(נניח Y יריעה אפינית). X היא סגורה אם"ם

יש אידיאל הומוגני $\mathfrak{a} \subset \mathbb{k}[\underline{t}] \otimes B$ כך

ש- $X = Z_{\mathbb{P}^n \times Y}(\mathfrak{a})$. $B := \mathcal{O}_Y(Y)$

הוכחה. 1). נניח כי $X = Z_{\mathbb{P}^n \times Y}(\mathfrak{a})$ עבור $\mathfrak{a}$

הומוגני. כאן $\mathbb{P}^n \times Y = \bigcup_{i=0}^{n} U_i \times Y$

כיסוי פתוח אפיני. מספיק להוכיח כי

$X \cap (U_i \times Y)$ סגורה ב- $U_i \times Y$.

יש איזומורפיזם של יריעות $g_i : \mathbb{A}^n \times Y \to U_i \times Y$.

אז נוכיח כי $g_i^{-1}(X)$ סגורה ב- $\mathbb{A}^n \times Y$.

תהי $\psi_i : \mathbb{k}[t_0, \dots] \to \mathbb{k}[t_1, \dots]$ הפונקציה - הומומורפיזם של אלגברה

$\psi_i(f(\underline{t})) := f(\underline{t})|_{t_i := 1}$. אז

$g^{-1}(X) = Z_{\mathbb{A}^n \times Y}(\psi_i(\mathfrak{a}))$, שהיא סגורה.

2) להיפך נניח ש- X סגורה ב- $\mathbb{P}^n \times Y$. (תת-יריעה)

נתבונן בקונוס

$C(X) := ($ הסגור של $\pi^{-1}(X)$ ב- $\mathbb{A}^{n+1} \times Y) \subset \mathbb{A}^{n+1} \times Y$

$\pi : (\mathbb{A}^{n+1} - \{0\}) \times Y \to \mathbb{P}^n \times Y$

כאשר

ההטלה.

מכאן ש- $\pi^{-1}(X)$ סגורה ב- $\mathbb{A}^{n+1}-\{0\}$

הרי $C(X)\cap(\mathbb{A}^{n+1}-\{0\}) = \pi^{-1}(X)$,

הקבוצה הסגורה $C(X)$ אינווריאנטית תחת

האוטומורפיזם g_λ, $\lambda\in\mathbb{K}^\times$. לפי טענה 1

האידאל $\mathfrak{a} := I(C(X))$

הינו הומוגני. כמו כן

$$C(X) = Z_{\mathbb{A}^{n+1}\times Y}(\mathfrak{a}),$$

לכן

$$\pi^{-1}(X) = C(X)\cap(\mathbb{A}^{n+1}-\{0\}) = Z_{(\mathbb{A}^{n+1}-\{0\})\times Y}(\mathfrak{a})$$

ולכן

$$X = Z_{\mathbb{P}^n\times Y}(\mathfrak{a})$$

□

טענה 3. יהי $\mathfrak{a}\subset\mathbb{K}[\underline{t}]$ אידאל הומוגני,

ויהי f פולינום הומוגני. אם $Z_{\mathbb{P}^n}(\mathfrak{a})\subset Z_{\mathbb{P}^n}(f)$,

אז יש $1\le m$ כך ש- $f^m\in\mathfrak{a}$.

הוכחה. נשים לב כי

$$Z_{\mathbb{A}^{n+1}}(\mathfrak{a}) = \pi^{-1}(Z_{\mathbb{P}^n}(\mathfrak{a}))\cup\{0\}$$

וכמובן לגבי $Z_{\mathbb{A}^{n+1}}(f)$, אלא כן

$$Z_{\mathbb{A}^{n+1}}(\mathfrak{a})\subset Z_{\mathbb{A}^{n+1}}(f).$$

לפי המשפט H [illegible]: $\sqrt{\mathfrak{a}}\supset\sqrt{(f)}\ni f$

ולכן יש $1\le m$ כך ש- $\mathfrak{a}\ni f^m$. □

טענה 4. יהי $\mathfrak{a} \subset \Bbbk[\underline{t}]$ אידיאל הומוגני.
התנאים הבאים שקולים:

(i) $Z_{\mathbb{P}^n}(\mathfrak{a}) = \emptyset$

(ii) יש $1 \le d$ כך ש- $\mathfrak{a}_d = \Bbbk[\underline{t}]_d$.

כאן $\mathfrak{a}_d := \mathfrak{a} \cap \Bbbk[\underline{t}]_d$.

הוכחה. $(ii) \Rightarrow (i)$: הפונקציות $t_0^d, \dots, t_n^d \in \mathfrak{a}_d \subset \mathfrak{a}$,

ולכן $Z_{\mathbb{P}^n}(\mathfrak{a}) \subset \bigcap_{i=0}^{n} \underset{\underset{Z_{\mathbb{P}^n}(t_i^d)}{\|}}{Z_{\mathbb{P}^n}(t_i)} = \emptyset$.

$(i) \Rightarrow (ii)$: נניח כי $Z_{\mathbb{P}^n}(\mathfrak{a}) = \emptyset$.

אז לכל i מתקיים $Z_{\mathbb{P}^n}(\mathfrak{a}) \subset Z_{\mathbb{P}^n}(t_i)$.

אז קיים $1 \le m_i$ כך ש- $t_i^{m_i} \in \mathfrak{a}$.

ניקח $d := m_0 + \dots + m_n$.

מונומים כאלה $f = t_0^{l_0} \cdots t_n^{l_n} \in \Bbbk[\underline{t}]_d$, כאשר
$l_0 + \dots + l_n = d$. אז יש לפחות אינדקס אחד
i כך ש- $l_i \ge m_i$. ולכן $t_i^{l_i} \in \mathfrak{a} \Leftarrow f \in \mathfrak{a}_d$.

∎

עד כאן
11.5.11