הטופולוגיה של יריעות אלגבריות

אפיניות

טענה. תהי X תת-קבוצה של $\mathbb{A}^n$. אז הסגור של X (בטופ' זריסקי) הוא $Z(I(X))$.

הוכחה. (תרגיל)

הגדרה. מרחב טופולוגי X נקרא *מרחב נתריאני* אם כל סדרה יורדת של קבוצות סגורות

$$Y_0 \supsetneq Y_1 \supsetneq \cdots$$

היא סופית.

טענה. המרחב (זריסקי) $\mathbb{A}^n$ הוא נתריאני.

הוכחה. ניקח סדרה יורדת כנ"ל, ונגדיר $a_i := I(Y_i)$. אז $a_0 \subsetneq a_1 \subsetneq \cdots$, ולכן יש סופיות (חוג הפולינומים $k[\underline{t}]$ הוא נתריאני). $\square$

טענה. יהי X מרחב טופולוגי נתריאני, ותהי Y תת-קבוצה כלשהי של X. אז Y (עם הטופ' המושרית) הוא מרחב נתריאני.

הוכחה. תרגיל.

מסקנה. תהי X יריעה אפינית ו- $U \subset X$ תת-קבוצה פתוחה. אז U מרחב נתריאני.

הגדרה. יהי X מרחב טופולוגי, ויהי Y קבוצה סגורה ב-X. הקבוצה Y נקראת **אי-פריקה** אם אין תת-קבוצות סגורות $Y \supsetneq Y_1, Y_2$ כך ש- $Y = Y_1 \cup Y_2$.

טענה. יהי $\mathfrak{a}$ אידיאל רדיקלי ב- $k[\underline{t}] = k[t_1,\dots,t_n]$. אז $\mathfrak{a}$ ראשוני אמ"ם הקבוצה $Z(\mathfrak{a})$ אי-פריקה.

הוכחה. א. נניח כי $Y := Z(\mathfrak{a})$ אי-פריקה.
ניקח $f,g \in k[\underline{t}]$ כך ש- $fg \in \mathfrak{a}$. צ"ל $f \in \mathfrak{a}$ או $g \in \mathfrak{a}$.

כעת
$$Y = Z(\mathfrak{a}) \subset Z(fg) = Z(f) \cup Z(g)$$

מאחר ש- Y אי-פריקה הרי או $Y \subset Z(f)$ או $Y \subset Z(g)$. אם $Y \subset Z(f)$ אז
$\mathfrak{a} = I(Y) \supset I(Z(f)) \ni f$. (רדיקלי!)

אחרת $g \in \mathfrak{a}$.

ב. נניח כי $\mathfrak{a}$ ראשוני, ו- $Y = Y_1 \cup Y_2$. (כאן שוב $Y := Z(\mathfrak{a})$)
צ"ל $Y = Y_1$ או $Y = Y_2$. כעת
$\mathfrak{a} = I(Y) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$.

אם $\mathfrak{a} = I(Y_1)$ אז $Y = Z(\mathfrak{a}) = Z(I(Y_1)) = Y_1$.

אחרת יש $f \in I(Y_1) - \mathfrak{a}$. אז לכל $g \in I(Y_2)$ מתקיים $fg \in I(Y_1) \cap I(Y_2) = \mathfrak{a}$, ולכן, לפי הראשוניות של $\mathfrak{a}$, $g \in \mathfrak{a}$. מסיקים כי $\mathfrak{a} \supset I(Y_2)$, ולכן $I(Y_2) = \mathfrak{a}$. $\square$

טענה. יהי X מרחב טופולוגי נתרייני, ותהי
$Y \subset X$ קבוצה סגורה. אז:
1. יש קבוצות סגורות אי-פריקות $Y_1, \ldots, Y_r$ (מספר סופי) כך ש- (i) $Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_r$.
2. אם (ii) $Y_i \not\subset Y_j$ לכל $j \neq i$, אז הקבוצה $\{Y_i\}_{i=1,\ldots,r}$ היא יחידה, והקבוצות נקראות הרכיבים האי-פריקים של Y. (irreducible components)

הוכחה.
1. תהי $\mathcal{Y} := \{$ קבוצות סגורות $Y \subset X$ אשר אינן איחוד סופי של קבוצות סגורות אי-פריקות $\}$.

~~צריך~~ להוכיח כי $\mathcal{Y} = \emptyset$.

נניח בדרך השלילה כי $\mathcal{Y} \neq \emptyset$. אז יש לה קבוצה $Y \in \mathcal{Y}$ שהיא מינימלית ביחס להכלה; אחרת יש $Y_1 \in \mathcal{Y}$, ~~$Y \supsetneq Y_1$~~, וכן $Y_2 \in \mathcal{Y}$, $Y_1 \supsetneq Y_2$, וכו', בסתירה לנתריניות של X.

אם כן תהי Y קבוצה מינימלית כאמור ב-$\mathcal{Y}$. Y איננה אי-פריקה, הרי $Y = Y_1 \cup Y_2$ כאשר $Y_i \subsetneq Y$. בגלל המינימליות נובע כי $Y_i \notin \mathcal{Y}$. וכן Y_i הוא איחוד סופי של אי-פריקים ולכן גם $Y = Y_1 \cup Y_2$. הגענו לסתירה.

2. אם כן יש קבוצה $\{Y_i\}_{i=1}^{r}$ של תת-קבוצות סגורות אי-פריקות של Y כך ש- $Y = \bigcup Y_i$. אם הוצאת קבוצות מיותרות אפשר להניח כי תנאי (ii) מתקיים.

3. נניח כי $Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_m$
$= Z_1 \cup \cdots \cup Z_n$

כאשר Y_i ו- Z_j קבוצות סגורות אי-פריקות, ו-
$Y_i \not\subset Y_{i'}$ ו- $Z_j \not\subset Z_{j'}$ לכל $i \neq i'$ ו- $j \neq j'$.

ניקח אינדקס i. אז
$Y_i = Y_i \cap Y = \bigcup_{j=1}^{n} (Y_i \cap Z_j)$.

מאחר ש- Y_i אי-פריקה, הרי יש j כך ש-
$Y_i \subset Z_j$. נקבל פונקציה
$\varphi : \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n\}$
כך ש- $Y_i \subset Z_{\varphi(i)}$.

בדומה יש פונקציה $\psi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$
כך ש- $Z_j \subset Y_{\psi(j)}$.

לכן $Y_i \subset Z_{\varphi(i)} \subset Y_{\psi(\varphi(i))}$.

מן ההנחה שלנו נקבל כי $i = (\psi \circ \varphi)(i)$.

בדומה $j = (\varphi \circ \psi)(j)$. לכן $m = n$ ו-
$Y_i = Z_{\varphi(i)}$. □

הגדרה. יהי X מרחב טופולוגי נתריאני.
שרשרת של קבוצות סגורות אי-פריקות ב- X
היא סדרה $(Y_0, Y_1, \dots, Y_n)$ של
קב' סגורות אי-פריקות כך ש- $Y_i \subsetneq Y_{i+1}$.
האורך של השרשרת הוא n.

הגדרה. יהי X מרחב טופולוגי נתריאני.
המימד של X הוא המספר

$$\dim X := \sup \left\{ \text{אורכים של שרשראות של קב' סג' אי-פריקות ב-} X \right\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

טענה. יהי $\mathfrak{a}$ אידיאל בחוג הפולינומים
$\Bbbk[t_1, \dots, t_n]$, ונגדיר $X := Z(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{A}^n(\Bbbk)$.
אז $\dim X = \dim \Bbbk[\underline{t}]/\mathfrak{a}$.

הוכחה. לפי טענה שהוכחנו, קבוצה סגורה $Y \subset \mathbb{A}^n(\Bbbk)$
היא אי-פריקה אמ"מ האידיאל $\mathfrak{p} := I(Y)$
הוא ראשוני. מקבלים התאמה ביג'קטיבית בין שרשראות
$(Y_0, \dots, Y_m)$ של קב' סג' אי-פריקות ב- X
לבין שרשראות של אידיאלים ראשוניים $(\mathfrak{p}_0, \dots, \mathfrak{p}_m)$
ב- $\Bbbk[\underline{t}]$ כך ש- $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_0$; כלומר שרשראות של אידיאלים
ראשוניים בחוג $\Bbbk[\underline{t}]/\mathfrak{a}$. $\square$

(108)

משפט. תהי X תת-יריעה סגורה ב- $\mathbb{A}^n$.
אז $\dim X \leq n$.

<u>הגדרה</u> 1. יריעה אפינית אי-פריקה ממימד 1 נקראת
<u>עקום</u> <u>אפיני</u> (affine curve).

2. יריעה אפינית אי-פריקה ממימד 2 נקראת
משטח אפיני (affine surface).

מכפלות של יריעות אפיניות

(ה)

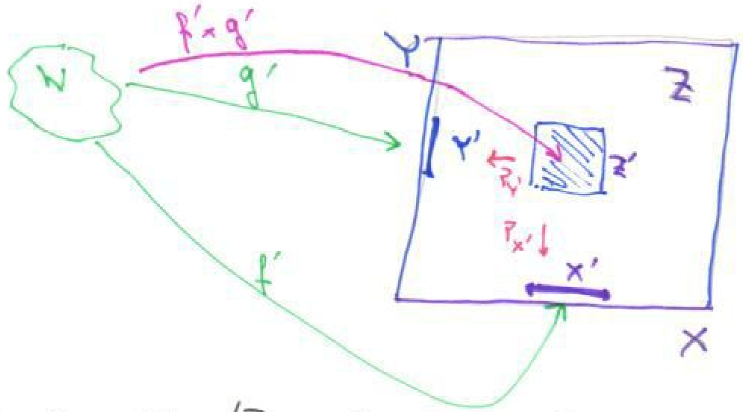
משפט. יהיו X ו- Y מרחבים של פונקציות
מעל שדה $\mathbb{K}$ (לאו דווקא סגור אלגברית), ויהיו
$X' \subset X$ ו- $Y' \subset Y$ תת-מרחבים (לאו דווקא סגורים).
נסמן מרחב של פונקציות $Z := X \times_{\mathsf{Sp}(\mathbb{K})} Y$, כלומר
המכפלה הקטגורית של X ו- Y, עם המורפיזמים
$p_X : Z \to X$ ו- $p_Y : Z \to Y$. נגדיר
$Z' := X' \times Y' \subset X \times Y$, עם טופולוגית התת-מרחב, $\mathcal{O}_{Z'} := \mathcal{O}_Z|_{Z'}$,
$p_{X'} := p_X|_{Z'}$ ו- $p_{Y'} := p_Y|_{Z'}$.
אז השלשה $(Z', p_{X'}, p_{Y'})$ היא מכפלה
של X' ו- Y' בקטגוריה $\mathsf{Sp}(\mathbb{K})$.
במילים אחרות, $X' \times_{\mathsf{Sp}} Y'$ הוא תת-מרחב של $X \times_{\mathsf{Sp}} Y$.

(ד) הוכחנו כבר שבקטגוריה $\mathsf{Sp}(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K}$ שדה כלשהו) יש
מכפלה. יתר על כן, כאשר המרחבים X ו- Y ב- $\mathsf{Sp}(\mathbb{K})$,
הקבוצה שבבסיס המרחב $X \times_{\mathsf{Sp}(\mathbb{K})} Y$ היא המכפלה
הקרטזית $X \times Y$, וההטלות p_X ו- p_Y מ-
$X \times_{\mathsf{Sp}} Y$ ל- X ו- Y בהתאמה הן ההטלות הרגילות.
כלומר, המכפלה הקטגורית ב- $\mathsf{Sp}(\mathbb{K})$ מתחלפת עם
הפונקטור השכחה $\mathsf{Sp}(\mathbb{K}) \to \underline{\mathrm{Set}}$.

---

(110) **הוכחה.** על פי מה שהוכחנו (בתרגיל) הפונקציה $p_{X'}: Z' \to X'$ ו- $p_{Y'}: Z' \to Y'$ הן מורפיזמים ב- $\mathcal{Sp}(Ab)$.

ניקח מרחב בסדר W, ומורפיזמים $f': W \to X'$ ו- $g': W \to Y'$. אז: הרכבה עם ההכלות $X' \to X$ ו- $Y' \to Y$ נקבל מורפיזמים $f: W \to X$ ו- $g: W \to Y$.



מהתכונה האוניברסלית של (Z, p_X, p_Y) יש מורפיזם של מרחבים $f \times g: W \to Z$ כך ש: $p_X \circ (f \times g) = f$ ו- $p_Y \circ (f \times g) = g$. ואכן $(f \times g)(W) \subset Z'$; לכן יש מורפיזם $f' \times g': W \to Z'$ שנותן את $f \times g$ אחרי הרכבה עם ההכלה $Z' \to Z$. המורפיזם $f' \times g'$ מקיים $p_{X'} \circ (f' \times g') = f'$ ו- $p_{Y'} \circ (f' \times g') = g'$. היחידות של $f' \times g'$ ברורה, בגלל הפונקטור השכחה ל- Set. $\square$

עד פה 12.4

(11)

עתה ~~[illegible]~~ k ~~[illegible]~~ סגור אלגברית.

משפט (מכפלה של יריעות אפיניות)

יהיו X ו- Y יריעות אלג' אפיניות. אז יש יריעה אלגברית אפינית Z, ומורפיזמים $p_X : Z \to X$ ו- $p_Y : Z \to Y$, כך שהשלשה (Z, p_X, p_Y) היא מכפלה של X ו- Y [illegible] בקטגוריה $\mathrm{Sp}(k)$.

יתר על כן, ההומ' של k-אלגברות
$$p_X^* \otimes p_Y^* : \mathcal{O}_X(X) \otimes_k \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_Z(Z)$$
הוא איזומורפיזם.

__הוכחה__ נבחר שיכונים סגורים $X \subset \mathbb{A}^m$ ו- $Y \subset \mathbb{A}^n$. תהי $Z := X \times Y$, תת-קבוצה [illegible] של $\mathbb{A}^{m+n}(k) = \mathbb{A}^{[illegible]}$. נתבונן בהטלות $p_{\mathbb{A}^m} : \mathbb{A}^{m+n} \to \mathbb{A}^m$ ו- $p_{\mathbb{A}^n} : \mathbb{A}^{m+n} \to \mathbb{A}^n$ (קואורד' הראשונות והאחרונות). אז $Z = p_{\mathbb{A}^m}^{-1}(X) \cap p_{\mathbb{A}^n}^{-1}(Y)$, ברור שזו קבוצה סגורה ב- $\mathbb{A}^{m+n}$. לכן $(Z, \mathcal{O}_Z) := (Z, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{m+n}}|_Z)$ היא יריעה אפינית, ויש לנו מורפיזמים $p_X := p_{\mathbb{A}^m}|_Z : Z \to X$ ו- $p_Y := p_{\mathbb{A}^n}|_Z : Z \to Y$.

112

בגלל התכונה האוניברסלית, של $\otimes_k$ (קו-מכפלה ב- $(\underline{Alg}(k))$, ההומו' ρ_X^* ו- ρ_Y^* משרים הומו'

$$(ק)\quad \rho_X^* \otimes \rho_Y^* : \mathcal{O}_X(X) \otimes_k \mathcal{O}_Y(Y) \longrightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$$

מאחר ש- $\mathcal{O}_Z(Z)$ איזו' ל- $k[t_1,\dots,t_{m+n}] \cong k[t_1,\dots,t_m] \otimes_k k[t_1,\dots,t_n]$,

ברור כי (ק) הוא סורג'קטיבי: [illegible] כי כל הומו'

אינג'קטיבי: נבחר בסיסים $\{f_i\}_{i\in I}$ ו- $\{g_j\}_{j\in J}$

כ- k-מרחבים של $\mathcal{O}_X(X)$ ו- $\mathcal{O}_Y(Y)$. אז $\{f_i \otimes g_j\}$

בסיס של $\mathcal{O}_X(X) \otimes_k \mathcal{O}_Y(Y)$. כעת

$$(\rho_X^* \otimes \rho_Y^*)(f_i \otimes g_j)(z) = (f_i g_j)(z) = f_i(x)\, g_j(y)$$

לכל $z=(x,y)\in X\times Y$. נניח שיש $\lambda_{i,j}\in k$

כך ש- $\sum_{(i,j)\in I'\times J'} \lambda_{i,j} f_i g_j = 0$ ב- $\mathcal{O}_Z(Z)$,

כאשר $I'\subset I$ ו- $J'\subset J$ קבוצות סופיות.

ניקח $x\in X$. אז

$$\sum_{j\in J'} \Big(\sum_{i\in I'} \lambda_{i,j} \cdot f_i(x) \Big) \cdot g_j = 0$$

ב- $\mathcal{O}_Y(Y)$. לכן $\sum_{i\in I'} \lambda_{i,j} \cdot f_j(x) = 0$ לכל $j\in J'$.

לכן $\sum_{i\in I'} \lambda_{i,j} \cdot f_j = 0$ ב- $\mathcal{O}_X(X)$; לכן $\lambda_{i,j}=0$

לכל $i\in I'$. אם כן הראינו כי (ק) אינג'קטיבית.

113

פתרון: יהי $W \in Sf(k)$, ויהיו $f: W \to X$

ו- $g: W \to Y$ מורפיזמים. בפרט, הם"ן $f^*: \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_W(W)$

ו- $g^*: \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_W(W)$. לכן לפי תכונת הקו-מכפלה

$\otimes_k$, ישנו הומו' יחיד של k-אלגברות

$$\varphi: \mathcal{O}_Z(Z) \to \mathcal{O}_W(W)$$

כך ש- $\varphi \circ p_X^* = f^*$ ו- $\varphi \circ p_Y^* = g^*$.

לפי Z יריעה אפינית, לפי משפט II קיים מורפיזם

יחיד ב- $Sf(k)$ $h: W \to Z$ כך ש-

$\varphi = h^*$. מאחר ו- X ו- Y אפיניות, לפי משפט

II מתקיים $p_X \circ h = f$ ו- $p_Y \circ h = g$.

$\boxed{\text{כלומר } h^* \circ p_X^* = f^* \text{ ו- } h^* \circ p_Y^* = g^*}$ $\square$

הנה משפט משמעותי:

משפט. יהי k שדה סגור אלגברית, ותהיינה A ו-B k-אלגבראות מצומצמות. אז $A \otimes_k B$ הינו k-אלגברה מצומצמת.

הוכחה. A היא איחוד של אלגבראות נוצרות סופית, ובדומה B. אם $A \supset A'$ ו- $B \supset B'$ תת-אלגבראות נ"ס, אז $A' \otimes_k B' \subset A \otimes_k B$ (כי אלו k-מודולים חופשיים). מספיק להוכיח כי $A' \otimes_k B'$ מצומצם. יהיו X ו- Y יריעות אפיניות כך ש- $A' \cong \mathcal{O}_X(X)$ ו- $B' \cong \mathcal{O}_Y(Y)$. אז, לפי סעיף 2 דלעיל, $B' \otimes_k A' \cong \mathcal{O}_Z(Z)$; ולכן זו אלגברה מצומצמת.

$\square$

תרגיל. ראינו כי $\mathbb{A}^2(k) \cong \mathbb{A}^1(k) \times \mathbb{A}^1(k)$ כיריעות אפיניות (בשתי הקטגוריות $\mathsf{Sp}(k)$ ו- $\underline{\mathsf{Var}}_{\mathrm{af}}(k)$). להוכיח כי הטופולוגיה של $\mathbb{A}^2(k)$ איננה טופולוגיית המכפלה.

המשפט מראה כי קטגוריה $\underline{Var}_{af}(k)$
יש מלאה קטגוריות, וכי מלאה זאת מתלכדת
עם הפונקטור $\underline{Var}_{af}(k) \to Sp(k)$.

חבורות אלגבריות ליניאריות
(Linear algebraic groups)

הגדרה חבורה אלגברית ליניארית (או אפינית)
היא יריעה אלגברית אפינית $(G, \mathcal{O}_G)$, יחד
עם:
- מורפיזם $\mu : G \times G \to G$
שנקרא כפל;
- מורפיזם $\iota : G \to G$
שנקרא ההופכי;
- איבר $e \in G$ שנקרא היחידה.

כך ש אקסיומות החבורה מתקיימות.

דוגמה החבורה $GL_n(k)$ של מטריצות הפיכות.
נגדיר מאת ה-k היריעה האפינית הבאה.
יהיו $t_{11}, \dots, t_{nn}$ הקואורדינטות של מרחב המטר. [illegible]
$M_n(k) \cong \mathbb{A}^{n^2}(k)$. יש פולינום
$\det(\underline{t}) \in k[\underline{t}]$; אזי GL_n
היא הקבוצה הפתוחה ה[illegible]

$GL_n(\Bbbk) := D(\det(\pm 1)) \subset M_n(\Bbbk)$. (116)

תרגיל. העתקות כפל מטריצות והיפוך מטריצות הם מורפיזמים של יריעות אפיניות.

משפט. תהי G חבורה אלגברית לינארית. אז G איזומורפית לתת-חבורה סגורה של $GL_n(\Bbbk)$, עבור n מתאים.

מורפיזם של חבורות אלגבריות הוא הומומורפיזם של חבורות $f: G \to H$, שהוא גם מורפיזם של יריעות.

הערה: בצורה דומה ניתן להגדיר חבורה טופולוגית להיות חבורה בקטגוריה $\underline{Top}$ (עם המכפלה בקטגוריה $G \times_{Top} G$). וחבורת לי היא חבורה בקטגוריה $\underline{Mfld}(\mathbb{R}, anal)$ של יריעות אנליטיות.

פירוק ז'ורדן כפלי
(Jordan)

מטריצה g ב-$GL_n(\mathbb{K})$ נקראת אוניפוטנטית אם
הערך העצמי היחיד שלה הוא 1. מטריצה g נקראת
פשוטה למחצה (semisimple) אם היא ניתנת
ללכסון. כל מטריצה g ניתנת לפרק

$$\boxed{g = g_s g_u} \to GL_n(\mathbb{K}),$$

כאשר g_s פשוטה למחצה, ו- g_u אוניפוטנטית.

הוכחה: hgh^{-1} בצורת ז'ורדן של g:

$$hgh^{-1} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & \lambda_1 \end{bmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & [\;] \end{bmatrix}$$

אז

$$g_s := h^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{bmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \end{bmatrix} \cdot h$$

ו-

$$g_u := h^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \end{bmatrix} \cdot h$$

מסקנה שפירוק כזה יש לכל חבורה אלגברית לינ' :

(118) **משפט.** תהי G חבורה אלגברית לינארית.
אז לכל איבר $g \in G$ ישנם איברים יחידים
g_s ו- g_u ב- G, כך ש:

(i) $g = g_u \cdot g_s = g_s \cdot g_u$.

(ii) האיבר g_s הוא פשוט למחצה; כלומר לכל מורפיזם $\varphi : G \to GL_n(K)$, המטריצה $\varphi(g_s)$ היא פשוטה למחצה.

(iii) האיבר g_u הוא אוניפוטנטי; כלומר לכל מורפיזם $\varphi : G \to GL_n(K)$, המטריצה $\varphi(g_u)$ היא אוניפוטנטית.

אלגברות לי

Lie algebras

הגדרה

אלגברת לי מעל k היא מ"ו [illegible] $\mathfrak{g}$,

יחד עם פונקציה בילינארית (bracket) (סוגרי לי)

$$[-,-] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g},$$

המקיימת:

(i) $[\gamma_1, \gamma_2] = -[\gamma_2, \gamma_1]$

(ii) זהות יעקובי (Jacobi):

$$[[\gamma_1, \gamma_2], \gamma_3] + [[\gamma_3, \gamma_1], \gamma_2] + [[\gamma_2, \gamma_3], \gamma_1] = 0.$$

דוגמה $\mathfrak{gl}_n(k) = M_n(k)$, המטריצות בגודל $n\times n$.

הסוגריים הם $[\gamma_1, \gamma_2] := \gamma_1 \cdot \gamma_2 - \gamma_2 \cdot \gamma_1$.

תהי G חבורה אלגברית לינארית. אז $\mathfrak{g}$ ...

היא אלגברת לי $\mathfrak{g}$. ההתאמה $G \mapsto \mathfrak{g}$ היא

פונקטור מקטגורית החבורות האלגבריות הלינאריות לקטגורית אלגברות

לי. עבור $GL_n(k)$, אלגברת לי היא $\mathfrak{gl}_n(k)$.

אם $G \subset GL_n(k)$ תת-חבורה סגורה, שמוגדרת

ע"י המשוואות $f_1, \dots, f_m$; כלומר $I(G) = (f_1, \dots, f_m)$

עבור $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{O}_{GL_n}(GL_n)$, אז $\mathfrak{g}$ [illegible]

הוא הגרעין של הנגזרות

$$\mathfrak{g} := Z(df_1, \dots, df_m) \subset \mathfrak{gl}_n(k) = M_n(k),$$

כאשר $df_i: M_n(k) \to k$

הדיפרנציאלים (הנגזרות) של f_i, בנקודה

$e = \underline{1} \in GL_n(k)$.

כלומר $\mathfrak{g}$ היא <u>המרחב המשיק</u> ל- G בנקודה e.

<u>דוגמה</u> $SL_n(k) := \{ g \in GL_n(k) \mid det(g) = 1 \}$.

אלגברת הלי שלה היא

$\mathfrak{sl}_n(k) := \{ \gamma \in M_n(k) \mid tr(\gamma) = 0 \}$.

עד פה 13.4