מכפלות קטגוריות ודואליות

יהיו X_1 ו- X_2 מרחבים טופולוגיים נתונים.
במכפלה הקרטזית $X_1 \times X_2$, עם טופולוגיית המכפלה,
והטלות $p_1: X_1 \times X_2 \to X_1$, ו- $p_2: X_1 \times X_2 \to X_2$.
ידוע כי ההטלות הן רציפות. כמו כן יהיו נתונים
מרחב טופולוגי Z, ופונקציות רציפות $f_i: Z \to X_i$,
הפונקציה
$$f: Z \to X_1 \times X_2$$
$$f(z) := (f_1(z), f_2(z))$$
הינה רציפה.

אבל מסתבר שניתן לאפיין את המכפלה $X_1 \times X_2$
בתוך הקטגוריה $\underline{\mathrm{Top}}$, באופן פורמלי!

<u>הגדרה</u>. תהי $\underline{C}$ קטגוריה, ויהיו C_1 ו- C_2
אובייקטים. <u>מכפלה</u> של C_1 ו- C_2 היא אובייקט
P ב- $\underline{C}$, יחד עם מורפיזמים $p_i: P \to C_i$,
אשר מקיימים את <u>התנאי</u> הבא: בהינתן אובייקט
(UP) D ב- $\underline{C}$, ומורפיזמים $f_i: D \to C_i$, <u>קיים</u> מורפיזם
<u>יחיד</u> $f: D \to P$ כך ש-
$f_i = p_i \circ f$.

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, bend left, "\exists!\, f"] \arrow[ddrr, "f_1"'] \arrow[ddrrrr, "f_2"] & & P \arrow[dd, "p_1"'] \arrow[ddrr, "p_2"] & & \\
& & & & \\
& & C_1 & & C_2
\end{tikzcd}$$

משפט. אם מכפלה (P, p_1, p_2) (של C_1 ו- C_2) קיימת, אז היא יחידה עד כדי איזומורפיזם יחיד. כלומר אם גם המכפלה (P', p_1', p_2') מקיימת את התנאי (*) אז יש איזומורפיזם יחיד $g: P' \to P$ ב- $\underline{C}$ כך ש- $p_i' = p_i \circ g$.

הוכחה. יהא $g: P' \to P$ המורפיזם היחיד שקיים, עפ"י התכונה (*) של (P', p_1', p_2'), ביחס למורפיזמים $p_i: P \to C_i$. בדומה יש מורפיזם יחיד $f: P \to P'$.

כעת גם $g \circ f$ וגם 1_P מקיימים

$$p_i \circ (g \circ f) = p_i = p_i \circ 1_P : P \to C_i .$$

בגלל היחידות מקבלים $g \circ f = 1_P$.

בדומה $f \circ g = 1_{P'}$.

∎

הגדרה. כעת אפשר לדבר על המכפלה של C_1 ו- C_2, אם היא קיימת. הסימון הוא $P =: C_1 \times_{\underline{C}} C_2$.

(בד"כ נכתוב רק $C_1 \times C_2$, אם ברורה הקטגוריה $\underline{C}$)

(בד"כ לא מזכירים במפורש את המורפיזמים p_1 ו- p_2)

<u>הערה</u>: לא תמיד קיימת מכפלה בקטגוריה,
אבל בכ״ל מסתם אוניברסליות.

<u>תרגיל</u>: מצא תת-קטגוריה מלאה $\underline{C}$ של $\underline{Set}$, וזוג אובייקטים C_1 ו- C_2,
כך שהמכפלה $C_1 \times_{\underline{C}} C_2$ איננה קיימת (ב- $\underline{C}$).
(רמז: קבוצות סופיות, שיקולי ספירה.)

<u>הערה יותר חשובה</u>: תהי $\underline{C}'$ תת-קטגוריה
מלאה של $\underline{C}$, ויהיו $C_1, C_2 \in \underline{C}'$. יתכן
כי המכפלה $C_1 \times C_2$ ב- $\underline{C}'$ וגם ב- $\underline{C}$
קיימות, אבל <u>שונות</u>! (*) הסיבה היא שהכמתים
שונים: האובייקטים D שבוחרים עליהם
בודקים את התנאי (P) נלקחים מ- $\underline{C}$ או מ- $\underline{C}'$
בהתאמה... נראה בהמשך.

(*) כלומר
$C_1 \times_{\underline{C}} C_2 \neq C_1 \times_{\underline{C}'} C_2$
בקטגוריה $\underline{C}$.

<u>דוגמה</u>. בקטגוריה $\underline{Top}$, המכפלה שלה
בסעיף קודם היא גם המכפלה בקטגוריה.

<u>דוגמה</u>. בקטגוריה $\underline{Set}$ המכפלה היא המכפלה
הקרטזית.

טו

<u>דוגמה</u>. בקטגוריה $\underline{Grp}$, המכפלה היא
המכפלה הקרטזית.

<u>דוגמה</u> גם בקטגוריה $\underline{Mod}\ A$ המכפלה
היא המכפלה הקרטזית. (שהוא גם הסכום הישר).

אנו רואים שבדוגמאות האלו הפונקטור השוכח
$F : \underline{C} \to \underline{Set}$ מתחלף עם המכפלה.
זה <u>לא</u> תמיד נכון!

המכפלה הקטגורית ב- $Sp_{\mathbb{k}}(\mathbb{k})$.

משפט. יהיו $(X,\mathcal{O}_X)$ ו- $(Y,\mathcal{O}_Y)$ שני אובייקטים בקטגוריה $Sp_{\mathbb{k}}(\mathbb{k})$. אז המכפלה

$$(X,\mathcal{O}_X)\times(Y,\mathcal{O}_Y)$$

קיימת.

הוכחה. ניקח את הקבוצה $Z := X\times Y$ (המכפלה הקרטזית ב- $\mathcal{S}et$). הטופולוגיה על Z לא תהיה טופולוגיית המכפלה, אלא טופולוגיה דקה יותר. … נוצרת ע"י

לכל קבוצות פתוחות $U\subset X$ ו- $V\subset Y$, ועבור כל אוסף סופי $f_1,\dots,f_n\in\mathcal{O}_X(U)$, ו- $g_1,\dots,g_n\in\mathcal{O}_Y(V)$ של פונקציות,

נתבונן בפונקציה $h := \sum_i f_i g_i : U\times V\to\mathbb{k}$; (*)

כלומר $h(x,y) := \sum_i f_i(x)\cdot g_i(y)$.

הפונקציה h מגדירה תת-קבוצה

$$D(h)\subset U\times V\subset X\times Y = Z, \quad (**)$$
$$D(h) := \{z\in U\times V \mid h(z)\neq 0\}.$$

הבסיס לטופולוגיה על Z הוא האוסף $\{D(h)\}$ עבור כל הפונקציות h הנ"ל, כלומר כמו ב- (*)

(44) תחילה, נזכיר כי האוסף $\{D(h)\}$ הוא, אמנם, בסיס טופולוגיה; כלומר לכל h_1,h_2 מתקיים

$$D(h_1)\cap D(h_2) = \bigcup_j D(h'_j)\,,$$ לאיזה

אוסף $\{h'_j\}$ של פונקציות. ואם

$$D(h_i)\subset U_i\times V_i\,,$$

ואז

$$D(h_1)\cap D(h_2)\subset (U_1\cap U_2)\times(V_1\times V_2)\,.$$

הפונקציה

$$h := h_1\cdot h_2 : (U_1\cap U_2)\times(V_1\times V_2)\to k$$

מקיימת, וכן

$$D(h_1)\cap D(h_2) = D(h)\,,$$

שהרי $h(z)\neq 0$ אמ"מ $h_1(z)\neq 0$ וגם $h_2(z)\neq 0$.

— • —

עתה נגדיר את אלומת הפונקציות הרגולריות $\mathcal{O}_Z$.
ניקח $W\subset Z$ פתוחה, ופונקציה $f: W\to k$.
יהי $z\in W$. הפונקציה f מוגדרת שהיא רגולרית ליד z אם יש סביבה מהצורה

$$D(h)\subset U\times V$$

כאשר h כמו ב-(**), ופונקציה

$$h' = \sum_{i=1}^{n} f'_i\cdot g'_i : U\times V\to k$$ כמו ב-(*),

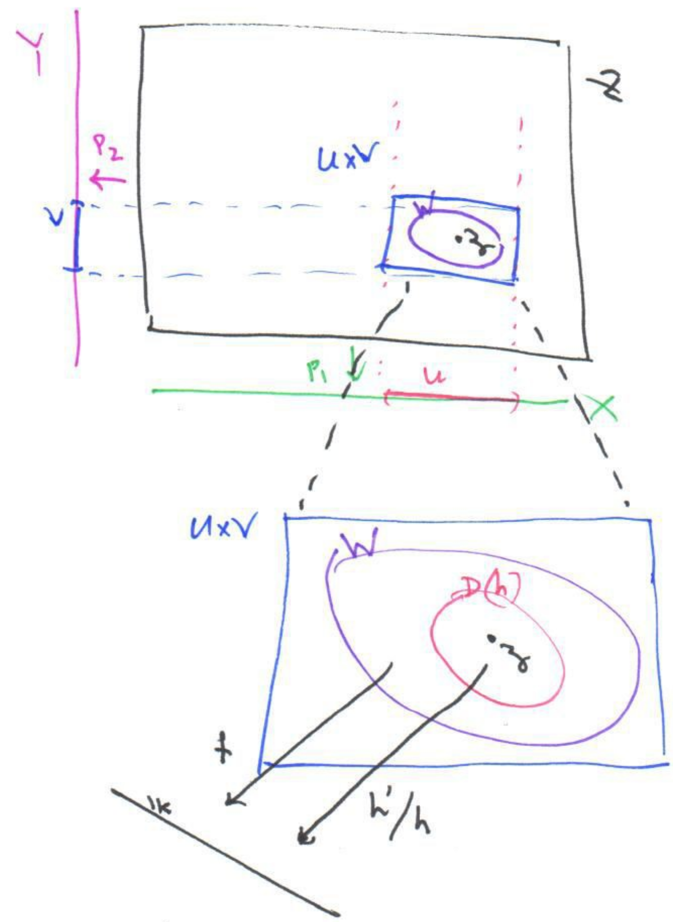
כלומר $f'_i\in\mathcal{O}_X(U)$ ו- $g'_i\in\mathcal{O}_Y(V)$,

המקיימים:

$$\boxed{z \in D(h) \subset W}$$

ו-

$$\boxed{f|_{D(h)} = \frac{h'|_{D(h)}}{h}}.$$



אם f רגולרית בכל $z \in W$, אז f תיקרא רגולרית. נסמן את קב׳ הפ׳ הרגולריות ב- $\mathcal{O}_Z(W)$.

(46) סוף הרצאה 10

תרגיל:

א. להראות כי d_Z מטריקה, וכי (Z,d_Z) מרחב מטרי כנדרש.

ב. להראות כי ההטלות p_1,p_2 הן מורפיזמים ב- $\underline{Sp}(M)$.

ג. להראות כי בהינתן מרחב (M,d_M) ב- $\underline{Sp}(M)$, ומורפיזמים $f: M\to X$ ו- $g: M\to Y$, ישנו מורפיזם יחיד $h: M\to Z$ (הוא בקטגוריה $\underline{Sp}(M)$) כך ש- $p_1\circ h=f$ ו- $p_2\circ h=g$. □

הערה. המכפלה בקטגוריה $\underline{Top}$ איננה שווה למכפלה בקטגוריה $\underline{Sp}(\mathbb{R})$, אבל קשה להראות דוגמה קונקרטית.

(1) כבר הראינו שלוח $X:=\{\frac{1}{n}\}$ סגור ב- $\mathbb{R}$), שם $X^2 =$ (קבוצה סגורה ב- $\mathbb{R}^2$) היא המכפלה ב- $\underline{Top}$, המכפלה $X\times_{Sp}X$ היא אותו מרחב טופולוגי, אבל יש ב- $X\times_{Sp}X$ פחות פונקציות מאשר ב- $X\times_{Top}X$.

(2) אנו נראה שעבור היריעה האלגברית $X=\mathbb{A}^1(\mathbb{K})$, המרחבים הטופולוגיים $X\times_{Top}X$ ו- $X\times_{Sp}X$ שונים.

עד כאן
15.3