המכפלה ותנאי ההפרדה

תהי $\underline{C}$ קטגוריה, ו- $C \in \underline{C}$ אובייקט.

נניח כי המכפלה בקטגוריה $C \times_{\underline{C}} C$ קיימת אז

יש לנו מורפיזם האלכסון (diagonal)

$$\Delta : C \to C \times_{\underline{C}} C$$

אשר מאופיין ע"י: $p_i \circ \Delta = 1_C : C \to C$.

דוגמה: בקטגוריות של Set, Top נקבל:

$\Delta(x) = (x,x) \in X \times X$ לכל $x \in X$.

תרגיל. נתבונן בקטגוריה Top. להראות כי

X מרחב האוסדורף אםם $\Delta(X)$ קבוצה

סגורה ב- $X \times_{Top} X$.

(זה יופיע בהמשך...)

אלגברה קומוטטיבית

(כל החוגים חילופיים עם יחידה.)

יהי A חוג קומוטטיבי. נזכיר כי A הוא <u>שדה</u> (field) אם $1 \neq 0$ (כלומר A איננו החוג הטריוויאלי), וכל איבר $a \in A$ שונה מ-0 הוא הפיך.

A נקרא <u>תחום שלמות</u> (integral domain) אם $1 \neq 0$, ולכל $a, b \neq 0$ מתקיים $ab \neq 0$.

אידיאל $\mathfrak{p} \subset A$ נקרא <u>ראשוני</u> (prime) אם חוג המנה $A/\mathfrak{p}$ הוא תחום שלמות.

אידיאל $\mathfrak{m} \subset A$ נקרא <u>מקסימלי</u> אם $\mathfrak{m} \neq A$, ו-$\mathfrak{m}$ מקסימלי ביחס להכלה כזאת. ידוע כי $\mathfrak{m}$ מקסימלי אם"ם $A/\mathfrak{m}$ שדה.

הלמה של צורן (אקסיומת הבחירה) מבטיחה שבכל חוג לא טריוויאלי A יש אידיאל מקסימלי. (ידוע?)

<u>תרגיל</u> 1) למצוא את כל האידיאלים המקסימליים בחוגים $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/(27)$, $\mathbb{Z}/(12)$, $K[t]$
(כאן K שדה ו-t משתנה).

* 2) למצוא את כל האידיאלים הראשוניים בחוג $\mathbb{Z}[t]$.

(19) *3) $X:=[0,1]$ הקטע הסגור ב- $\mathbb{R}$ ועם הטופולוגיה הרגילה.

$A := \{ f: X\to \mathbb{R}$ פונקציות רציפות $\}$

מהם האידיאלים המקס' ב- A ?

<u>הגדרה.</u> חוג A נקרא מקומי (local) אם יש בו אידיאל מקסימלי יחיד.

<u>טענה:</u> יהי A חוג ו- m אידיאל בו.

1) אם $A\neq m$ וכל איבר $a\in A-m$ הפיך, אז m מקסימלי ו- A מקומי.

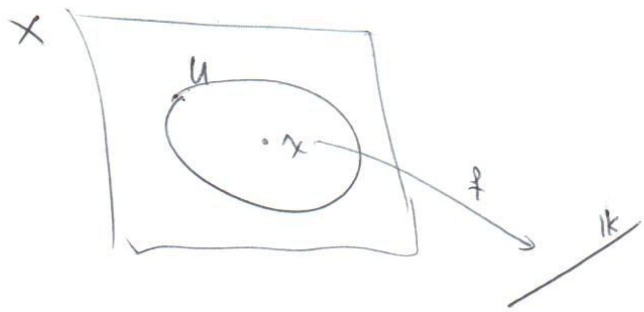
2) אם m מקסימלי וכל $a\in 1+m$ הפיך, אז A מקומי.

<u>הוכחה.</u> 1) יהי a_1 אידיאל כלשהו ב- A המקיים $A\neq a_1$, בהכרח כל איברי a_1 אינם הפיכים. מההנחה על m נקבל ש- $a_1\subset m$. ונקבל ש- m מקסימלי, והוא המקסימלי היחיד.

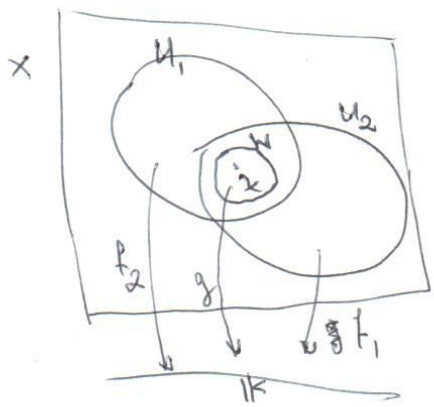
2) לפי 1), מספיק להוכיח שכל $a\notin m$ הוא הפיך. ניקח כזה a. אז האידיאל $a_1 := m+aA$ גדול ממש מ- m. מאחר ש- m מקסימלי $\Leftarrow$ $a_1=A$. לכן קיים $b\in A$ ו- $c\in m$ כך ש: $1=c+ab$. כלומר $1-c\in 1+m$, ולפי ההנחה זה הפיך. ונקבל $ab=1-c$. לכן a הפיך. $\square$

חוגים מקומיים בגיאומטריה

~~[illegible]~~ יהי $(X,\mathcal{O}_X)$ מרחב עם פונקציות מעל שדה $\mathbb{K}$.
ניקח נקודה $x \in X$, ונתבונן על אוסף הזוגות
$N_x := \{(U,f)\}$, כאשר U קבוצה פתוחה ב-X
המכילה את x, ו-$f \in \mathcal{O}_X(U)$.



נגדיר יחס $\sim$ על הקבוצה $N_x = \{(U,f)\}$
כך: $(U_1,f_1) \sim (U_2,f_2)$ אם יש זוג $\cancel{(U_3,f_3)}$ $(W,g) \in N_x$ כך ש-
$W \subset U_1 \cap U_2$, ו- $f_1|_W = g = f_2|_W$.



קל לראות כי $\sim$ הוא יחס שקילות.

~~הגדרה: החוג המקומי של המרחב~~ ~~$(X,\mathcal{O}_X)$~~

~~באלגברה זה הוא הלוקליזציה~~

נסמן: $\mathcal{O}_{X,x} := N_x/\sim$ (קבוצה).

נסמן כי m_x את תת-הקבוצה של $\mathcal{O}_{X,x}$ שמורכבת מן נציגים $(U,f) \in N_x$ כך ש- $f(x)=0$.

<u>משפט</u>.

1) יש מבנה יחיד של k-אלגברה על הקבוצה $\mathcal{O}_{X,x}$, כך שלכל סביבה פתוחה U של x, ההעתקה הקנונית

$$\begin{cases} \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,x} \\ f \mapsto \left(\text{מחלקת השקילות של } (U,f)\right) \end{cases}$$

היא הומו' של k-אלגברות.

2) החוג $\mathcal{O}_{X,x}$ הוא חוג מקומי. האידאל המקסימלי של $\mathcal{O}_{X,x}$ הוא m_x.

<u>הוכחה</u>: <u>תרגיל</u>. □

נשים לב שאם $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ הערך $f(x) \in k$ מוגדר היטב: נבחר מייצג $(U,\tilde{f})$ עבור f, ונגדיר $f(x) := \tilde{f}(x)$. הערך לא תלוי במייצג.

מקבלים ~~הומו~~ הומומורפיזם של k-אלגברות $\mathcal{O}_{X,x} \to k$, שהגרעין שלו הוא m_x.

מודולים

יהי A חוג (קומוטטיבי). מודול מעל A הוא חבורה אבלית M, יחד עם פעולה של החוג A, אשר מקיימת כמה אקסיומות מוכרות. הדרך הקצרה לבטא זאת, היא שמבנה של A-מודול על חבורה אבלית M הינו הומומורפיזם של חוגים

$$A \longrightarrow End_{\mathbb{Z}}(M),$$

כאשר $End_{\mathbb{Z}}(M)$ הינו חוג האנדומורפיזמים של החבורה האבלית M (והוא אינו קומוטטיבי.)

<u>דוגמה</u>. ניקח שדה $\mathbb{K}$, מרחב וקטורי V ואופרטור ליניארי $\varphi : V \to V$. אז V הינו $\mathbb{K}$-מודול, ו-

$$\varphi \in End_{\mathbb{K}}(V) \subset End_{\mathbb{Z}}(V).$$

יהי $A := \mathbb{K}[t]$ חוג הפולינומים. יש הומ' יחיד של ~~חוגים~~ $\mathbb{K}$-אלגבראות

$$f : \mathbb{K}[t] = A \to End_{\mathbb{K}}(V)$$

כך ש- $f(t) = \varphi$. בצורה הזאת V הופך ל- A-מודול.

כמו בחבורות אבליות, גם כל "A-מודולים" יש תת-מודול, מודול מנה, משפטי איזומורפיזם...

אם $\mathfrak{a} \lhd A$ אידיאל, אז הקבוצה

$$\mathfrak{a}M := \Big\{ \sum_{\text{סופי}} a_i m_i \;\Big|\; a_i \in \mathfrak{a},\ m_i \in M \Big\}$$

הינה תת-מודול של M.

יהיו M_1 ו- M_2 מודולים. הסכום הישר, והמכפלה הישרה, הם המודול

$$M_1 \times M_2 = M_1 \oplus M_2$$

עם פעולות לפי רכיבים.

יותר כללי: תהי I קבוצה (סופית או אינסופית), ויהי $\{M_i\}_{i\in I}$ אוסף של A-מודולים.

המכפלה הישרה היא המודול

$$\prod_{i\in I} M_i := \Big\{ f: I \to \bigcup M_i \;\Big|\; f(i) \in M_i \Big\},$$

עם פעולות לפי רכיבים. כלומר

$$(f+g)(i) := f(i) + g(i) \in M_i$$

וכו'.

הסכום הישר הוא תת-המודול

12

$$\bigoplus_{i\in I} M_i := \left\{ f: I \to \bigcup_i M_i \;\middle|\; \begin{array}{r} f(i)\in M_i \text{ ,} \\ \text{ו-} f(i)=0 \text{ פרט} \\ \text{למס' סופי של } i \end{array} \right\}$$

<u>דוגמה</u> $I = \mathbb{N}$.

$$\prod_i M_i = M_0\times M_1\times\cdots \ni (m_0,m_1,\dots)$$

$$\cup$$

$$\bigoplus_i M_i = M_0\oplus M_1\oplus\cdots \ni (m_0,m_1,\dots,0,0,\dots)$$

מהנתון $\{M_i\}_{i\in I}$ נקבל העת' קנוניות

$$g_i : M_i \longrightarrow \bigoplus_{j\in I} M_j$$

ו-

$$p_i : \prod_{j\in I} M_j \longrightarrow M_i$$

<u>תרגיל 2</u>. א) לאפיין את $\bigoplus M_i$ ו- $\prod M_i$ ע"י תכונות אוניברסליות בקטגוריה $\underline{Mod}\ A$.

ב) לנסות להכליל את א) כך: $\underline{C}$ קטגוריה, $\{C_i\}_{i\in I}$ אוסף של אובייקטים ב- $\underline{C}$. להגדיר $\prod_i C_i$ ו- $\coprod_i C_i$ (מכפלה וקו-מכפלה). כאן הקו-מכפלה היא הכללה של הסכום

$\Leftarrow$

(53) הישר כי Mod A. זה רעיון
יחידות של מכפלה וקו-מכפלה קטגוריות. (קיום:
לא תמיד יש!)

המודול החופשי $A^{(I)}$ עם בסיס I

הוא כזה, עם ההגדרה
$A^{(I)} := \{ f : I \to A \mid$ ל-f יש תומך סופי $\}$.

קל לראות כי $A^{(I)} \cong \bigoplus_{i \in I} A$.

את התכונה האוניברסלית של המודול החופשי
ראינו. A-מודול M נקרא חופשי אם הוא איזומורפי
ל- $A^{(I)}$ עבור I כלשהו.

* תרגיל 2: להוכיח: יהי A חוג (קומ') לא
סמי-לוקלי. A הוא שדה אם"ם כל A-מודול הוא
חופשי. (רמז: "$\Leftarrow$" f: הלמה של צורן).

תרגיל 3: יהי $\{M_i\}_{i \in I}$ אוסף של מודולים,
ויהי $\mathfrak{a}$ אידיאל. נגדיר $M := \bigoplus_i M_i$.
יש הומ' יחיד $\psi_i : M_i/\mathfrak{a}M_i \to M/\mathfrak{a}M$
כך שהדיאגרמה $\Leftarrow$

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "q_i"] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ M_i/a_i M_i \arrow[r, "\psi_i"] & M/a_i M \end{tikzcd}$$

קומוטטיבית - (ההפכים השונים רק ההלמה הקנונית).

להסיק ~~שיש~~ שיכון הוא מושרה

$$\Psi : \bigoplus_{i \in I} (M_i / a_i M_i) \to M/a_i M .$$

להוכיח כי Ψ בייקטיבי.

* תרגיל 3: יהי $\mathbb{K}$ שדה ויהי M $\mathbb{K}$-מודול.
יהיו X ו- Y שני בסיסים של M. אז
$|X| = |Y|$ ~~(שוויון עוצמות)~~.
נסמן $\operatorname{rank}_{\mathbb{K}} M := |X|$.

תרגיל 4: יהי A חוג לא טריוויאלי, ויהי
M A-מודול חופשי. יהיו X ו- Y שני בסיסים
של M. אז $|X| = |Y|$. (רמז: למצוא אידיאל
מקסימלי $\mathfrak{m} \subset A$; $\mathbb{K} := A/\mathfrak{m}$. להעזר בתרגיל 3'.)
נסמן $\operatorname{rank}_A M := |X|$.

עד כאן
16.3