(152) <u>משפט</u> המרחב הפרויקטיבי $\mathbb{P}^n$ הוא יריעה שלמה.

<u>הוכחה</u>. שלב 1. תהי Y יריעה כלשהי.

ניקח $X \subset \mathbb{P}^n \times Y$ תת-קבוצה סגורה.

צ"ל כי $p_Y(X)$ סגורה ב-Y. תהי $Y = \bigcup V_i$

כיסוי פתוח אפיני. מספיק להוכיח כי

$p_Y(X) \cap V_i$ סגורה ב-V_i, לכל i. אבל

ו- $p_Y(X) \cap V_i = p_{V_i}\left(X \cap (\mathbb{P}^n \times V_i)\right) = p_{V_i}(X_i)$,

$\underbrace{X \cap (\mathbb{P}^n \times V_i)}_{X_i}$ סגורה ב- $\mathbb{P}^n \times V_i$.

$$
\begin{tikzcd}
X_i \arrow[d] & \subset \mathbb{P}^n \times V_i \arrow[d, "p_{V_i}"'] & \subset \mathbb{P}^n \times Y \arrow[d, "p_Y"] & \supset X \arrow[d] \\
p_{V_i}(X_i) & \subset V_i & \subset Y & \supset p_Y(X)
\end{tikzcd}
$$

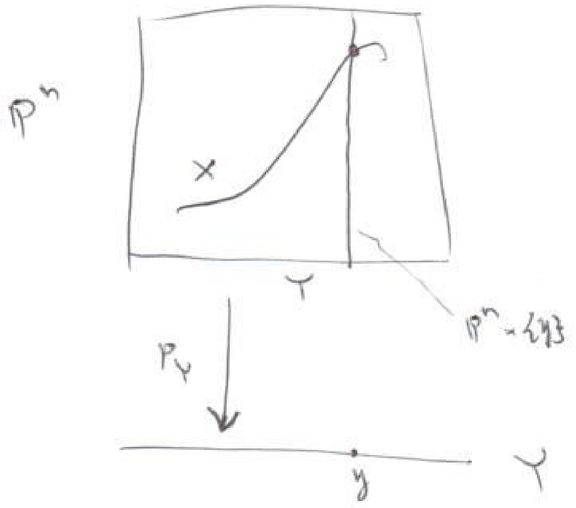
אם כן אפשר להחליף את Y ב-V_i; כלומר אפשר להניח כי Y יריעה <u>אפינית</u>.

<u>שלב 2</u>. כעת Y יריעה אפינית, ו- $B = \mathcal{O}_Y(Y)$.

X קבוצה סגורה ב- $\mathbb{P}^n \times Y$. לפי <u>טענה 2</u>

יש אידיאל הומוגני $\mathfrak{a} \subset K[\underline{t}] \otimes B$

כך ש- $\boxed{X = Z_{\mathbb{P}^n \times Y}(\mathfrak{a})}$ (*)



ניקח נקודה $y \in Y$. אז

$$\boxed{y \in p_Y(X) \iff X \cap (\mathbb{P}^n \times \{y\}) \neq \emptyset}$$

ניקח הומומורפיזם $\varphi_y : \mathbb{k}[\underline{t}] \otimes B \longrightarrow \mathbb{k}[\underline{t}]$

ע"י: $\varphi_y(f(\underline{t}) \otimes g) := f(\underline{t}) \cdot g(y)$, לכל $g \in B = \mathcal{O}_Y(Y)$. נשים לב כי $\varphi_y(a_i)$ א.ק.ל. הומוגניים ב- $\mathbb{k}[\underline{t}]$, ו-

$\varphi_y(a_i)_d = \varphi_y(a_{i,d})$.

כלומר: $X \cap (\mathbb{P}^n \times \{y\}) \cong Z_{\mathbb{P}^n}(\varphi_y(a_i))$ מהלמה הק'

$$" = Z_{\mathbb{P}^n \times \{y\}}(a_i)"$$

לכן

$$\boxed{Z_{\mathbb{P}^n}(\varphi_y(a_i)) \neq \emptyset \iff y \in P_Y(X)}$$

נשתמש שוב בלמה הקודמת:

$$(\heartsuit) \qquad \boxed{\varphi_y(a_{i,d}) \subsetneq \mathbb{k}[\underline{t}]_d \text{ לכל } d \text{ גדול.} \iff y \in P_Y(X)}$$

נגדיר בדרכה

(◇◇) $$\boxed{Y_d := \{ y \in Y \mid \varphi_y(\mathfrak{a}_d) \subsetneqq \Bbbk[\underline{t}]_d \}}$$

אזי

(◇) $$\boxed{\bigcap_{d \geq 1} Y_d = p_Y(X)}$$

אנו טוענים כי Y_d סגורה ב-Y לכל $d \geq 1$.

נבחר יוצרים הומוגניים $f_1, \dots, f_m$ לאידיאל $\mathfrak{a} \subset \Bbbk[\underline{t}] \otimes B$. אפשר להניח כי כולם שונים מ-0.

נגדיר $d_i := \deg(f_i)$. עבור $d \geq 1$ נגדיר ה"ל B-לינארית

$$\beta_d : \bigoplus_{i=1}^{m} \Bbbk[\underline{t}]_{d-d_i} \otimes B \to \Bbbk[\underline{t}]_d \otimes B$$

ע"י $$\beta_d(g_1, \dots, g_m) := \sum_{i=1}^{m} g_i(\underline{t}) \cdot f_i(\underline{t})$$

אז $\mathrm{Im}(\beta_d) = \mathfrak{a}_d$.

לכל $y \in Y$ נקבל ע"י הצבת y ב-$f_1, \dots, f_m$: ה"ל $\Bbbk$-לינארית בנוסחה φ,

$$\beta_d(y) : \bigoplus_{i=1}^{m} \Bbbk[\underline{t}]_{d-d_i} \to \Bbbk[\underline{t}]_d .$$

אז $\mathrm{Im}(\beta_d(y)) = \varphi_y(\mathfrak{a}_d)$.

מנוסחה (◇◇) נקבל:

$$Y_d = \{ y \in Y \mid \mathrm{rank}_{\Bbbk}\, \beta_d(y) < \mathrm{rank}_{\Bbbk}\, \Bbbk[\underline{t}]_d \}.$$

(155)

[illegible] נקבע בסיסים (של $\mathbb{k}$) ל-

(הבסיס הם המונומים מהמעלה הנכונה)

$\mathbb{k}[\underline{t}]_d$ ול- $\bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{k}[\underline{t}]_{d-d_i}$ אז

ההצג' β_d מוצגת ע"י מטריצה, (וגם α_d),

עם מקדמים בתחום B. התנאי ש-

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{k}}\, \beta_d(y) < r_d := \mathrm{rank}_{\mathbb{k}}\, \mathbb{k}[\underline{t}]_d$$

הוא שכל המינורים מסדר $r_d \times r_d$ של המטריצה $\alpha_d(y)$ שגודלם $r_d \times r_d$ [במטריצה α_d]

יהיו בדטרמיננטה $= 0$. כל דטרמיננטה כזאת הוא k

איבר בתחום B. ולכן Y_d קבוצה סגורה. $= Z_Y$ (הדטרמיננטות של המינורים) $\square$

ההצג' $\beta_d(y)$ מוצגת באותם בסיסים ע"י

המטריצה $\alpha_d(y)$; כלומר הצבת y במקדמי המטריצה

α_d.

שדה הפונקציות הרציונליות

הגדרה. תהי X יריעה אלגברית אי פריקה.
אז נתבונן בקבוצת הזוגות (U,f), כאשר
U קבוצה פתוחה לא ריקה ב- X, ו- $f\in\mathcal{O}_X(U)$.
נגדיר יחס שקילות על הזוגות, ע"י
$(U,f)\sim(V,g)$ אם $f|_{U\cap V}=g|_{U\cap V}$.

שדה הפונקציות הרציונליות על X הוא
קבוצת המנות $\{(U,f)\}/\sim$,
(נסמן אותו ב- $\underline{k}(X)$.

נשים לב כי $\sim$ אכן יחס שקילות, משום
ש- $f|_{U\cap V}=g|_{U\cap V}$ שקול לכך שיש W פתוחה לא ריקה, המוכלת
ב- $U\cap V$, כך ש- $f|_W=g|_W$.

טענה. 1. הקבוצה $\underline{k}(X)$ היא אכן שדה.

2. תהי U קבוצה פתוחה אפינית. אז ההעתקה

$$\varphi_U:\ \mathcal{O}_X(U)\to\underline{k}(X),\qquad f\mapsto (U,f)/\sim$$

הופכת את $\underline{k}(X)$ לשדה שברים של $\mathcal{O}_X(U)$.

3. תהי $x\in X$. אז ההעתקה $\mathcal{O}_{X,x}\to\underline{k}(X)$,

$$\underset{\in\,\mathcal{O}_{X,x}}{(U,f)/\sim}\ \mapsto\ \underset{\in\,\underline{k}(X)}{(U,f)/\sim}$$

הופכת את $\underline{k}(X)$ לשדה השברים של $\mathcal{O}_{X,x}$.

הערה. 1. פעולות החיבור והכפל כאן

ברורות. לדוגמה $(U,f)+(V,g) := (U\cap V, f+g)$.

אם (U,f) כך ש- $f\neq 0$ ב- $\mathcal{O}_X(U)$,

הרי $\underbrace{0\neq D_U(f)}_{=:V} \subset U$ ו- $\frac{1}{f}\in \mathcal{O}_X(V)$;

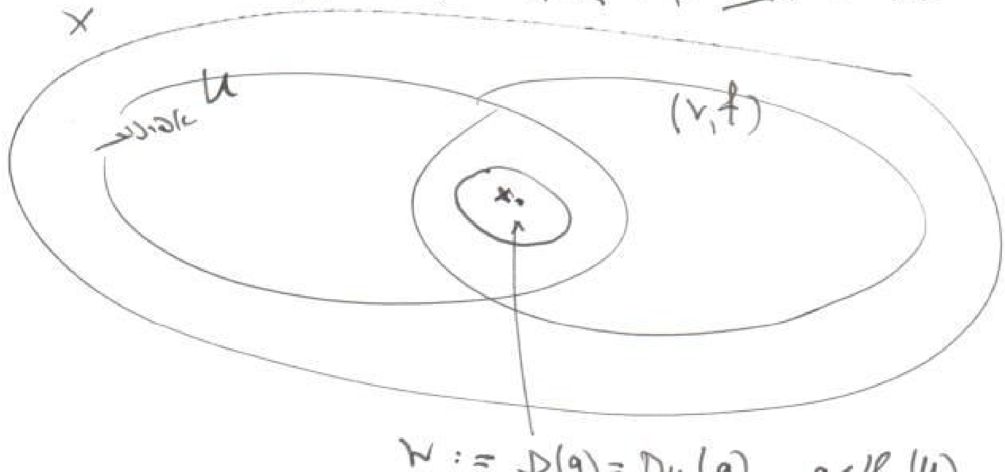
כלומר יש $(V,\frac{1}{f})\in \underline{k}(X)$, וזהו ההפכי כפלי של (U,f).

2. ברור שהוא הומו'. הטענה φ_U הוא איזומורפיזם.

$\hat{B}$ כי G שולח ל- $\underline{k}(X)$ הוא שדה $\underline{k}$

צריך מ- . $\mathcal{O}_X(U)=:A$. ניקח $(V,f)\in \underline{k}(X)$.

כלומר V פתוחה לא ריקה, ו- $f\in\mathcal{O}_X(V)$.



$W := D(g)=D_U(g),\quad g\in\mathcal{O}_X(U)$

יש $x\in U\cap V$; אז $g\in \overset{A}{\overset{\shortparallel}{\mathcal{O}_X(U)}}$ כך ש- $x\in \underset{\shortparallel}{D_U(g)}\overset{W}{} \subset U\cap V$.

אז $f|_W = \frac{g'}{g^m}$

עבור m ו- $g'\in\mathcal{O}_X(U)$, לפי $\mathcal{O}_X(W)=\mathcal{O}_U(W)=\mathcal{O}_U(U)_g=A_g$.

לכן $(V,f)\sim(W,f)\sim(U,g')/(U,g)^m\in \mathrm{Frac}(A)$.

158. 3. דוגמה - תרגיל.

□

עד פה 17.5

לצורך השקה אנחנו יכולים לחשוב דרגה כאשר נזכיר את החוג $\mathcal{O}_X(U)$, עבור U פתוחה אפינית ב-X, ו-$\mathcal{O}_{X,x}$, עבור $x \in X$, כתת-חוגים של השדה $k(X)$.

טענה. $\mathrm{tr.deg}_k\, k(X) = \dim X$.

הוכחה. לפי סעיף 2 בדוגמה הקודמת (במקרה האפיני) המצב הוא $\mathrm{tr.deg}_k\, k(X) = \dim \mathcal{O}_X(U) = \dim U$ לכל קבוצה פתוחה אפינית $U \neq \emptyset$. נשים לב שזה ד.מ. מצד שני, מאחר ש-X מוכלת באיחוד סופי של קב' סגורות אי-פריקות ב-X שלכל אחת יש בתוך קבוצה פתוחה אפינית U (ובמובן מסוים שלמה את כל רכיבי השרשרת), הרי $\dim X = \sup\{\dim U \mid U \text{ אפינית פתוחה}\}$. □

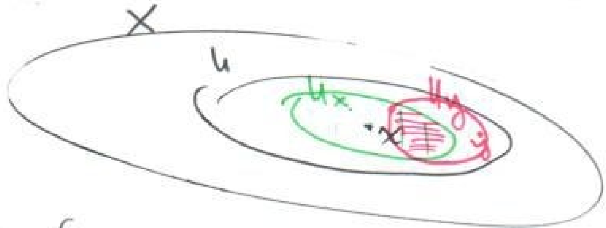
ח״

טענה. תהי U קבוצה פתוחה לא ריקה ב-X. אז $\mathcal{O}_X(U) = \bigcap_{x \in X} \mathcal{O}_{X,x}$, כתת-חוגים של השדה $k(X)$.

(159)

<u>הוכחה</u>. תהא ניקח $f \in \mathcal{O}_X(U)$.
אז לכל $x \in U$ הזוג (U,f) מייצג איבר בחוג המקומי $\mathcal{O}_{X,x}$, ולכן $f \in \mathcal{O}_{X,x} \subset \underline{k}(X)$.

לכיוון השני, נניח $f \in \underline{k}(X)$ מקיימת $f \in \bigcap_{x\in U} \mathcal{O}_{X,x}$. לכל $x \in U$ יש מייצג (U_x, f_x) של f כאיבר בחוג $\mathcal{O}_{X,x}$; כלומר U_x סביבה <u>פתוחה</u> שמכילה את x, ו- $f_x \in \mathcal{O}_X(U_x)$.
אפשר להניח כי $U_x \subset U$ (אם: הקטנת U_x כמידת הצורך). מקבלים כיסוי פתוח $U = \bigcup_{x\in U} U_x$.



ניקח $x,y \in U$.
מאחר שכל החוגים הן תת-חוגים של השדה $\underline{k}(X)$, והמייצגים (U_x, f_x) ו- (U_y, f_y) מייצגים את f ב- $\underline{k}(X)$, הרי $f_x|_{U_x\cap U_y} = f_y|_{U_x \cap U_y}$.

לפי תכונת השלמה, יש פונקציה $\tilde{f} \in \mathcal{O}_X(U)$ כך ש- $\tilde{f}|_{U_x} = f_x$ לכל x. אבל אז $(U, \tilde{f})$ מייצג את f ב- $\underline{k}(X)$. כלומר $f = \tilde{f}$.

□

הערה: אם $U \subset X$ קבוצה פתוחה לא ריקה, אז $\mathcal{O}_X(U) \subset \underline{k}(X)$, ואילו $\underline{k}(X)$ הוא בדיוק שדה המנות של $\mathcal{O}_X(U)$.

דוגמא נוספת: $X := \mathbb{P}^n(k)$, ו- $U := X$. אז $\mathcal{O}_X(X) = k$, ואילו
$$\underline{k}(X) = k(t_1/t_0, \dots, t_n/t_0)$$

שדות והערכות דיסקרטיות עליהם

(discrete valuations)

הגדרה. יהי K שדה (אין דרישה סגירות אלגברית).
הערכה דיסקרטית של K היא פונקציה

$$v: K^\times \to \mathbb{Z}$$

כך ש:

$$v(ab) = v(a) + v(b)$$

$$v(a+b) \geq \min(v(a), v(b)) \quad [\text{אם } a+b \neq 0]$$

$$v(K^\times) = \mathbb{Z}.$$

בהינתן הערכה v של השדה K, נסמן

$$A := \{a \in K^\times \mid v(a) \geq 0\} \cup \{0\}$$

$$m := \{a \in K^\times \mid v(a) > 0\} \cup \{0\}$$

תרגיל. תוכיחו כי A חוג מקומי, עם אידיאל מקסימלי m. יתר על כן האידיאל m הוא ראשי: $m = (\pi)$ עבור $\pi \in K^\times$ (כל אחד) שמקיים $v(\pi) = 1$. השדה K הוא שדה השברים של A.

הגדרה חוג A נקרא חוג הערכה דיסקרטית (DVR = discrete valuation ring) אם יש שדה K והערכה דיסקרטית v כך ש- A הוא חוג ההערכה של v, כלומר: $A = \{a \in K^\times \mid v(a) \geq 0\} \cup \{0\}$.

תרגיל: יהי A חוג נותרי ו- $\mathfrak{m}$ אידיאל מקסימלי ב- A. יהי $A_{\mathfrak{m}}$ חוג הלוקליזציה, ויהי $\mathfrak{m}' := \mathfrak{m} \cdot A_{\mathfrak{m}}$ האידיאל המקסימלי של $A_{\mathfrak{m}}$. נסמן את שדות השאריות כך: $k(\mathfrak{m}') := A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}'$ ו- $k(\mathfrak{m}) := A/\mathfrak{m}$.

1) להראות כי ההעתקה הקנונית $k(\mathfrak{m}) \to k(\mathfrak{m}')$ היא איזומורפיזם (של שדות).

2) להראות כי ההעתקה הקנונית $\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2} \to \frac{\mathfrak{m}'}{\mathfrak{m}'^2}$ היא איזומורפיזם (של $k(\mathfrak{m})$ - מרחבים).

הגדרה. יהי A חוג מקומי נותרי, עם אידיאל מקסימלי $\mathfrak{m}$ ושדה שארית — $k(\mathfrak{m}) := A/\mathfrak{m}$.
החוג A נקרא חוג מקומי רגולרי (regular local ring)
אם $\operatorname{rank}_{k(\mathfrak{m})} \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2} = \dim A$.
[כזכור $\dim X$ הוא ממד קרול של החוג.]

דוגמה. יהי k שדה כלשהו ו- $A := k[t_1,\dots,t_n]$,
חוג הפולינומים ב- n משתנים. ניקח
$\mathfrak{m} := (t_1,\dots,t_n)$
ו- $A_{\mathfrak{m}} \supset \mathfrak{m}' := \mathfrak{m}\cdot A_{\mathfrak{m}}$. לפי משפט הממד:
$\dim A_{\mathfrak{m}} = \dim A = n = \operatorname{tr.deg}_k k(t_1,\dots,t_n)$. מצד שני
$\operatorname{rank}_k \frac{\mathfrak{m}'}{\mathfrak{m}'^2} = \operatorname{rank}_k \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2} = n$.
(נשים לב כי $A/\mathfrak{m} \cong A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}' \cong k$.)
לכן $A_{\mathfrak{m}}$ חוג מקומי רגולרי.

זה תרגיל שכדאי לעשות!

יש כמה אפיונים אחרים של חוגים רגולריים.
אזכיר בהמשך ~~כמה~~ אחד מהם.
חוגים מקומיים רגולריים הם תחומי שלמות.

(163) הנה משפט חשוב עדיין : (הוכחה דורשת של אלגברה הומו׳)

<u>משפט</u>. יהי A חוג מקומי רגולרי, ויהי $\mathbb{P}$ אידיאל ראשוני ב- A. אז חוג הלוקליזציה $A_{\mathbb{P}}$ הוא חוג מקומי רגולרי.

<u>דוגמה</u> ניקח את החוג $A := k[t_1, t_2]$.
והאידיאלים $\mathfrak{m} := (t_1, t_2)$ ו- $\mathbb{P} := (t_1)$ ב- A.
ראינו כבר שהחוג המקומי $A_{\mathfrak{m}}$ הוא רגולרי ממימד 2.
נתבונן באידיאל הראשוני $\mathbb{P}_{\mathfrak{m}} := \mathbb{P} \cdot A_{\mathfrak{m}} = (t_1) \subset A_{\mathfrak{m}}$.
הלוקליזציה $A_{\mathbb{P}} \cong (A_{\mathfrak{m}})_{\mathbb{P}_{\mathfrak{m}}}$.
החוג $A_{\mathbb{P}}$ הוא מקומי ממימד 1: השרשרת המקסימלית היחידה של ראשוניים היא $(0) \subsetneq \mathbb{P}$.
שדה השאריות הוא $A_{\mathbb{P}}/\mathbb{P}_{\mathbb{P}} \cong k(t_2)$
האידיאל המקסימלי הוא $\mathbb{P}_{\mathbb{P}} = (t_1)$
והמרחב הקו-משיק של זריסקי הוא
$$\mathbb{P}_{\mathbb{P}}/\mathbb{P}_{\mathbb{P}}^2 = k(t_2) \cdot \bar{t}_1 \cong k(t_1).$$
ולבסוף הלוקליזציה $(A_{\mathfrak{m}})_{(0)} \cong A_{(0)} = k(t_1, t_2)$ היא שדה, כלומר חוג מקומי רגולרי ממימד 0.

ד) משפט חשוב:

משפט. יהי A תחום שלמות מקומי מממד קרול 1, עם אידאל מקסימלי $\mathfrak{m}$. התנאים הבאים שקולים:

(i) A הוא חוג הערכה דיסקרטית.

(ii) A הוא חוג רגולרי מקומי.

(iii) $\mathfrak{m}$ הוא אידאל ראשי.

דוגמה. נחזור לדוגמה הקודמת. נתבונן בשדה
$$L := k(t_1, t_2)$$
ובחוג המקומי $B := A_{\mathfrak{p}} \subset L$ כאשר $\mathfrak{p} = (t_1)$. לפי המשפט, $A_{\mathfrak{p}}$ הוא חוג הערכה דיסקרטית של השדה L. מהי ההערכה המתאימה v? זוהי ההערכה ה-t_1-אדית. (t_1-adic val.).

באופן מפורש. ניקח פונקציה רציונלית $f(t_1,t_2) \neq 0$. מאחר שהחוג $k[t_1,t_2]$ הוא חוג פריקות יחידה, והאיבר t_1 הוא אי-פריק, הרי ניתן לכתוב $f = t_1^e \cdot g(t_1,t_2)/h(t_1,t_2)$ כאשר g ו-h פולינומים שאינם מתחלקים ב-t_1, ו-$e \in \mathbb{Z}$. אז $v(f) = e$.

דילוג

עוד על חוגים רגולריים

זה רק לשם שלמות - קצת אלגברה הומולוגית.

יהי A חוג קומוטטיבי. בהינתן A-מודולים M ו-N ניתן להגדיר את ה-A-מודולים

$$\mathrm{Ext}^n_A(M,N), \quad n \geq 0.$$

אחת הדרכים הכי נוחות: בוחרים רזולוציה חופשית למודול M, כלומר סדרה מדויקת

$$\cdots \to P^{-2} \xrightarrow{\partial^{-1}} P^{-1} \xrightarrow{\partial^0} P^0 \xrightarrow{\eta} M \to 0$$

עם A-מודולים שהם $P^0, P^{-1}, \dots$ חופשיים.
(בוחרים יוצרים ל-M, וזה נותן $P^0 \xrightarrow{\eta} M \to 0$; ממשיכים בוחרים יוצרים ל-$\mathrm{Ker}(\eta)$, וכו'..)

מקבלים קומפלקס $P := (\cdots \xrightarrow{\partial^{-1}} P^{-1} \xrightarrow{\partial^0} P^0 \to 0)$

וקומפלקס $\mathrm{Hom}_A(P,N) :=$

$$(0 \to \mathrm{Hom}_A(P^0,N) \xrightarrow{\varepsilon^0} \mathrm{Hom}_A(P^{-1},N) \xrightarrow{\varepsilon^1} \cdots)$$

אז $\mathrm{Ext}^n_A(M,N) = H^n\, \mathrm{Hom}_A(P,N) = \mathrm{Ker}(\varepsilon^n) / \mathrm{Im}(\varepsilon^{n-1})$.

הגדרה. המימד הגלובלי של החוג A הוא $\mathrm{gl.dim}\, A :=$

$$\sup\{ n \mid \mathrm{Ext}^n_A(M,N) \neq 0 \text{ עבור מודולים } M,N \text{ כלשהם} \} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

(16)

הגדרה חוג נותרי A נקרא **רגולרי** אם לכל אידיאל ראשוני $\mathfrak{p}$ בחוג, החוג המקומי $A_{\mathfrak{p}}$ הוא רגולרי.

משפט. (Serre). יהי A חוג נותרי ממימד קרול סופי. אז A חוג רגולרי אמ"מ $gl.\dim A < \infty$.

הערה: במשפט על לוקליזציה של חוגים מקומיים רגולריים ראינו ש- A חוג רגולרי אמ"מ A_m חוג מקומי רגולרי לכל אידיאל מקסימלי m ב-A.

שהרי, בהינתן $\mathfrak{p}$ ראשוני יש m מקסימלי שמכיל את $\mathfrak{p}$; ואז $A_{\mathfrak{p}}$ הוא לוקליזציה של A_m בראשוני $\mathfrak{p}_m = \mathfrak{p}\cdot A_m \subset A_m$.

עד פה 16.5